Задачи
с параметрами

Каргаполов Александр Михайлович

гимназия №10

alekarg@mail.ru

Задача 1.

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение.

Функция в левой части чётная по переменной x. Значит, если x_0 является решением уравнения, то и $-x_0$ также будет решением. Единственным может быть только решение $x = 0$. Подставим это значение переменной в уравнение и найдём те значения параметра, при которых $x = 0$ является корнем:

$$-2a\sin(1) + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ } \textit{или} \text{ } a = 2\sin(1)$$

(**необходимые условия единственности решения**).

Проверим, не будет ли других решений при найденных значениях параметра (**достаточность**).

При $a = 0$ уравнение принимает вид: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ - единственное решение,

Следовательно, значение $a = 0$ является ответом.

При $a = 2\sin 1$ получаем

$x^2 - 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0;\qquad x^2 + 4\sin 1 \cdot (\sin 1 - \sin(\cos x)) = 0;$

Так как $|\cos x| \le 1$, то $\sin 1 \ge \sin(\cos x);$

поэтому равенство достигается при одновременном выполнении двух условий:

$\begin{cases} x = 0, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ - единственное решение.

Следовательно, значение $a = 2\sin 1$ является ответом.

Ответ: $a = 0$, $a = 2sin1$.

Задача 2.

Найти все значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4+1) = y+1-|x|, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Легко заметить, что если $(x_0; y_0)$ -решение системы, то $(-x_0; y_0)$ также является её решением. Поэтому условие $x_0 = 0$ -**необходимое** для существования единственного решения.

Положим $x = 0$. Тогда $\begin{cases} a = y+1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} a = 0, \\ y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Проверим, не будет ли других решений при найденных значениях параметра (**достаточность**).

При $a = 0$ получаем $\begin{cases} 0 = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} |x| = y + 1, \\ y(y+1) = 0. \end{cases}$

Это система имеет три решения (1; 0), (-1; 0), (0; -1).

Следовательно, значение $a = 0$ не является ответом.

При $a = 2$ получаем $\begin{cases} 2x^4 + 2 = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} 2x^4 + |x| = y - 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Очевидно, что $2x^4 + |x| \geq 0$. Тогда из первого уравнения имеем $y \geq 1$.

В то же время из второго уравнения следует, что $y \leq 1$. Следовательно, $y = 1$,

а значит, $x = 0$. Проверка показывает, что пара (0; 1) – решение, а в силу ограничения для переменной y ($y \geq 1$ и $y \leq 1$) оно единственное.

Следовательно, значение $a = 2$ является ответом.

***Ответ*:** $a = 2$.

Задача 3.

Найти все значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Легко заметить, что если $(x_0; y_0)$ -решение системы, то $(-x_0; y_0)$ также является её решением. Поэтому условие $x_0 = 0$ -**необходимое** для существования единственного решения.

Положим $x = 0$. Тогда $\begin{cases} 1 = y + a, \\ y^2 = 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} a = 2, \\ y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 0, \\ y = 1. \end{cases}$

Проверим, не будет ли других решений при найденных значениях параметра (**достаточность**).

При $a = 2$ получаем $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + 2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ Подставив $x = 1$, $y = 0$, получаем, что

пара (1; 0) также является решением системы. Следовательно, при $a = 2$ система имеет более одного решения. Тогда значение $a = 2$ не является ответом.

При $a = 0$ получаем $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ Из второго уравнения этой системы следует,

что $|x| \le 1, |y| \le 1,$ откуда $|x| \ge x^2, y \le 1.$ Кроме того, $2^{|x|} \ge 1.$

Из всех этих неравенств получаем $2^{|x|} + |x| \ge 1 + x^2 \ge y + x^2.$

Следовательно, первое уравнение выполняется лишь в случае $|x| = x^2,\ 2^{|x|} = 1,\ y = 1.$

А это верно только при $x = 0$, $y = 1$. Таким образом, при $a = 0$ данная система имеет единственное решение (0; 1) и значение $a = 0$ является ответом.

Ответ: $a = 0$.

Задача 4.

Найти все значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2+1)a = y+\cos 2x, \\ 2^{|\sin x|}+|y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Легко заметить, что если $(x_0; y_0)$-решение системы, то $(-x_0; y_0)$ также является её решением. Поэтому условие $x_0 = 0$ -**необходимое** для существования единственного решения.

Положим $x = 0$. Тогда $\begin{cases} a = y+1, \\ 1+|y| = 2. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} a = 0, \\ y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Проверим, не будет ли других решений при найденных значениях параметра (**достаточность**).

При $a = 0$ имеем $\begin{cases} 0 = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2. \end{cases}$ Кроме решения $x = 0, y = -1$, получаем

ещё одно решение $x = \pi, y = -1$. Следовательно, при $a = 0$ система имеет

имеет более одного решения. Тогда значение $a = 0$ не является ответом.

При $a = 2$ имеем $\begin{cases} 2x^2 + 2 = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2. \end{cases}$ Ясно, что $2x^2 + 2 \geq 2$, $|y| \leq 1$.

Тогда $|y + \cos 2x| \leq 2$. И первое уравнение верно только при $x = 0, y = 1$.

Таким образом, при $a = 2$ данная система имеет единственное

решение $x = 0, y = 1$ и значение $a = 2$ является ответом.

Ответ: $a = 2$.

Задача 5.

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$|2x-a|+1=|x+3|$$

имеет единственное решение.

Решение 1.

Возможны четыре случая, в которых модули “раскрываются” по-разному.

1. $\begin{cases} 2x-a\geq 0, \\ x+3 \quad \geq 0, \\ 2x-a+1=x+3 \end{cases}$ $x_1=a+2 \;\; при \;\; a\geq -4.$

2. $\begin{cases} 2x-a\geq 0, \\ x+3 \quad \leq 0, \\ 2x-a+1=-x-3 \end{cases}$ $x_2=\dfrac{a-4}{3} \;\; при \;\; a\leq -8.$

3. $\begin{cases} 2x-a\leq 0, \\ x+3 \quad \geq 0, \\ -2x+a+1=x+3 \end{cases}$ $x_3=\dfrac{a-2}{3} \;\; при \;\; a\geq -4.$

4. $\begin{cases} 2x-a\leq 0, \\ x+3 \quad \leq 0, \\ -2x+a+1=-x-3 \end{cases}$ $x_4=a+4 \;\; при \;\; a\leq -8.$

Для существования единственного решения рассмотрим совокупность

равенств $\left[\begin{array}{l} x_1 = x_3\,,\ \text{если}\ a \geq -4, \\ x_2 = x_4\,,\ \text{если}\ a \leq -8. \end{array}\right.$ Имеем $\left[\begin{array}{l} a + 2 = \dfrac{a-2}{3},\ \text{если}\ a \geq -4, \\ \dfrac{a-4}{3} = a + 4,\ \text{если}\ a \leq -8. \end{array}\right.$

В итоге получаем, что $a = -4$ *или* $a = -8$.

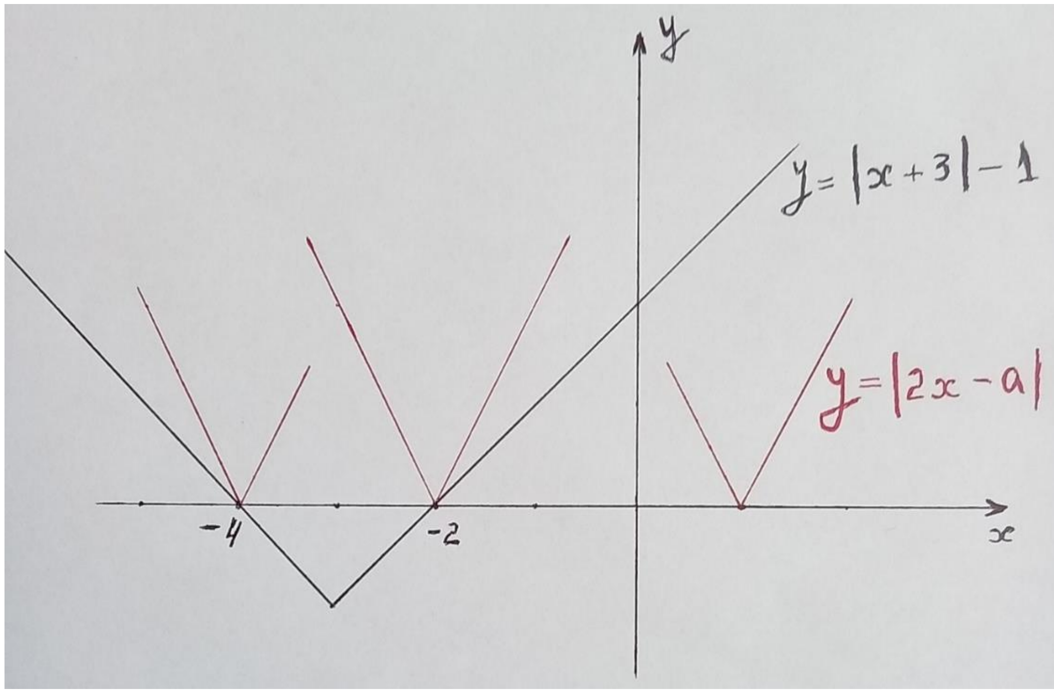
Ответ: *a* = -8, *a* = -4.

Решение 2.

Представим данное уравнение в виде $|2x-a|=|x+3|-1.$

Правая часть этого уравнения задаёт неподвижный "уголок",

левая – "уголок", вершина которого двигается по оси абсцисс.



Очевидно данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося “уголка” попадёт или в точку с координатами (-4,0), или в точку с координатами (-2,0). Тогда $|-8-a|=0$ или $|-4-a|=0$. Отсюда a = - 8 или a = - 4.

Ответ: a = -8, a = -4.

Решение 3.

Представим данное уравнение в виде $|2x-a|-|x+3|+1=0$ и рассмотрим функцию $f(x)=|2x-a|-|x+3|+1.$

На множестве $\left(-\infty, \frac{a}{2}\right)$ функция $f(x)$ монотонно убывает,

а на множестве $\left(\frac{a}{2}, \infty\right)$ – монотонно возрастает. Следовательно, в точке $x=\frac{a}{2}$

функция $f(x)$ принимает минимальное значение $-\left|\frac{a}{2}+3\right|+1.$ И график функции имеет единственную общую точку с прямой $y = 0$ тогда и только тогда, когда

$$-\left|\frac{a}{2}+3\right|+1=0.$$

Решая полученное уравнение относительно параметра a, находим два возможных значения a = -8 и a = -4.

Ответ: a = -8, a = -4.

Задачи

1. **Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение**

$$a^2x^2 - a\cdot tg(\cos x) + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = ctg1$.

2. **Найти все значения параметра *a*, при которых система уравнений**

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = \frac{4}{3}$.

3. **Найти все значения параметра *a*, при которых неравенство**

$$\cos 2x + a \leq 2\sqrt{x^2+16} - \frac{x^2+16}{a+\cos 2x}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = 3$.

4. **Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение**

$$|x-a| - |2x+2| = 3$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = -4$, $a = 2$.

5. **Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение**

$$5x-\left|3x-|x+a|\right|=10|x-2|$$

имеет единственное решение.

Ответ: a = -18, a = 14.

6. **Найти все значения параметра *a*, при которых неравенство**

$$|x+a|+2|x+2a|>1-3x$$

выполняется для любого *x*.

Ответ: $a<-\frac{1}{5}$.

Литература

1. **Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.** Задачи с параметрами. 3-е изд., допол. и перераб. – М.: ИЛЕКСА, 2007. – 328 с.

2. **Козко А.И., Чирский В.Г.** Задачи с параметром и другие сложные задачи. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2008. – 376 с.