Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников

Новосибирской области по математике 2024-2025 г.г.

Решение каждой задачи олимпиады оценивается из 7 баллов

1. На некотором острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Путешественник, попавший на этот остров, спросил каждого жителя про каждого другого, кем тот является. Всего он получил 24 ответа «он рыцарь» и 32 ответа «он лжец». Сколько рыцарей могло проживать на этом острове?

Решение. Заметим, что всего было получено 56 ответов. Если на острове живёт n человек, то ответов должно быть суммарно $n(n-1)$ – выбрать отвечающего, а затем задать вопрос про кого-то из оставшихся. Так как $56 = 8 \times 7$, на острове живёт суммарно 8 человек.

Рассмотрим фразу «он рыцарь». Её говорят только рыцари про рыцарей и лжецы про лжецов. Тогда, если на острове k рыцарей и $m = 8 - k$ лжецов, этот ответ будет произнесён ровно $k(k-1) + m(m-1)$ раз. Получаем уравнение

$$k^2 - k + 56 - 7k - 8k + k^2 = 24.$$

Оно преобразуется к $k^2 - 8k + 16 = 0$, что равносильно $(k-4)^2 = 0$, то есть $k = 4$.

Значит, на острове живёт ровно 4 рыцаря.

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

Только верный ответ с примером на 8 суммарных жителей и проверкой, что всё сходится – 1 балл.

Доказано, что на острове ровно 8 жителей – 2 балла.

Верно составлено уравнение на число рыцарей или лжецов – ещё 2 балла.

Не показано, что других решений нет (например, просто замечено, что $k = 4$ подходит, и ничего не сказано про другие возможные ответ) – минус 2 балла, то есть суммарно решение оценивается в 5 баллов, если выполнены предыдущие два критерия.

2. Дана таблица 5 на 5, раскрашенная в шахматном порядке. Можно ли расставить в её клетки числа 1, 2 и 3 таким образом, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел, стоящих на чёрных клетках, была равна сумме чисел, стоящих на белых?

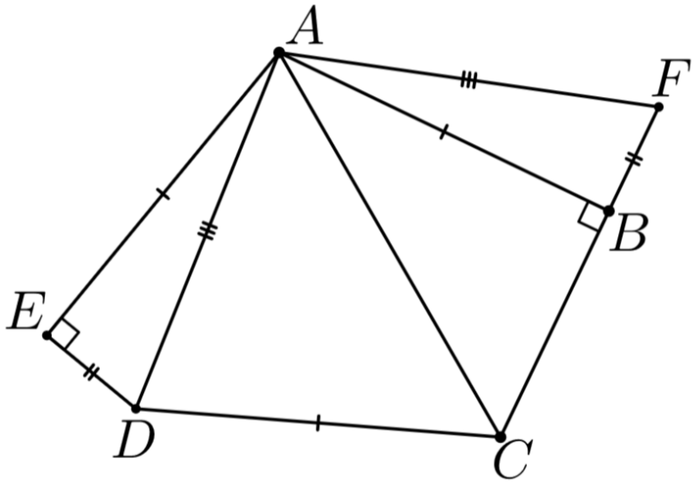
Решение. Да, можно. Например, подходит расстановка

1	2	1	1	1
1	1	1	3	2
1	1	2	3	1
2	3	3	3	1
1	1	1	2	1

Критерии. Любой верный пример даже без проверки его корректности – 7 баллов.

Любой неверный пример или попытки доказательства невозможности такой расстановки – 0 баллов.

3. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором
$$AB = CD = EA = BC + DE = 1$$
и $\angle ABC = \angle DEA = 90°$. Чему может быть равна площадь $ABCDE$?



Решение. Повернём треугольник AED вокруг точки A, получив треугольник ABF. Тогда $CF = CB + BF = CB + ED = 1$, и площадь треугольника AFC равна $\frac{1}{2}AB \cdot CF = 0.5$.

Кроме того, треугольники AFC и ADC равны по трём сторона, поэтому площадь треугольника ADC тоже равна 0.5. Итого

$$S_{ABCDE} = S_{AED} + S_{ACB} + S_{ACD} = S_{ACF} + S_{ACD} = 0.5 + 0.5 = 1.$$

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

Построен треугольник AFB – 2 балла.

4. Арина загадала 4 числа, вычислила их все попарные суммы, после чего выписала на доску четыре наименьших из них. Это оказались числа 1, 5, 8 и 9. Найдите две оставшиеся суммы, а также определите, какие числа могла загадать Арина.

Решение. Пусть Арина загадала числа $a \le b \le c \le d$. Ясно, что минимальная сумма равна $a + b$, а максимальная – $c + d$. Кроме того,

$$a + c \le b + c \le b + d$$

$$a + c \le a + d \le b + d$$

Значит, число $a + c$ является вторым по минимальности, число $b + d$ – вторым по максимальности, а числа $b + c$ и $a + d$ – в некотором порядке третьим и четвёртым.

В любом случае, имеем $a + b = 1$, $a + c = 5$, а две средних суммы в некотором порядке равны 8 и 9, откуда

$$b + d = (a + b + c + d) - (a + c) = (a + d) + (b + c) - (a + c) = 8 + 9 - 5 = 12$$

$$c + d = (a + b + c + d) - (a + b) = (a + d) + (b + c) - (a + b) = 8 + 9 - 1 = 16$$

Значит, оставшиеся суммы равны 12 и 16. Теперь разберём два случая

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a + c = 5, \\ b + c = 8, \\ a + d = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 - a, \\ c = 5 - a, \\ 6 - 2a = 8, \\ d = 9 - a. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = 2, \\ c = 6, \\ d = 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a + c = 5, \\ b + c = 9, \\ a + d = 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 - a, \\ c = 5 - a, \\ 6 - 2a = 9, \\ d = 9 - a. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3/2, \\ b = 5/2, \\ c = 13/2, \\ d = 19/2. \end{cases}$$

Эти два набора чисел и являются ответом.

Критерии. Только ответ или ответ с проверкой – 0 баллов.

Верно найдены оставшиеся суммы – 3 балла.

Верный разбор каждого из вариантов ответа – по 2 балла.

5. В школе имени Стефани Майер учатся 35 девушек, каждая из которых воздыхает ровно по 27 вампирам. Оказалось, что у любых трёх девушек есть ровно один общий вампир, по которому воздыхают они трое. Докажите, что есть ровно один вампир, по которому воздыхают все девушки.

Решение. Докажем для начала, что есть вампир, по которому воздыхают хотя бы 8 девушек. Предположим, это не так. Зафиксируем множество $D_1 = V_1, V_2, \dots, V_{27}$ из 27 вампиров, по которым воздыхает первая девушка. Переберём все $34 \times 33 / 2 = 561$ пар остальных девушек и их множества вампиров D_i и D_j. По условию для каждой пары i и j есть ровно один вампир, входящий во все три множества, то есть этих вхождений как раз 561. С другой стороны, каждый вампир из D_1 по предположению входит не более чем в 6 других D_i, и потому не более чем в $6 \times 5 / 2 = 15$ различных пар D_i и D_j. Тогда вхождений не более чем $15 \times 27 = 405$, что меньше требуемого количества 561. Значит, найдётся вампир, по которому воздыхает хотя бы 8 девушек.

Итак, есть некоторый вампир V, который, без ограничения общности, лежит в множествах $D_1, D_2, \dots, D_8$. Выберем произвольное множество B из оставшихся и рассмотрим все тройки множеств D_i, D_j, B для $i, j \leq 8$. Заметим, что этих троек $8 \times 7 / 2 = 28 > 27$, поэтому каким-то двум тройкам будет соответствовать один и тот же вампир из B, лежащий в этих трёх множествах. Но это может быть только вампир V, так как иначе какие-то две тройки девушек будут иметь больше одного вампира. Значит, V лежит в B, и, в силу произвольности выбора B, лежит вообще во всех множествах, что нам и требовалось.

То, что искомый вампир ровно один, очевидно. Если бы их было хотя бы 2, то это противоречило бы условию задачи для любых трёх девушек сразу.

Критерии. Доказано только, что есть вампир, воздыхаемый хотя бы восемью девушками – 3 балла.

Доказано только, что если есть вампир, воздыхаемый хотя бы восемью девушками, то задача решена – 3 балла.