Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников

Новосибирской области по математике 2024-2025 г.г.

Решение каждой задачи олимпиады оценивается из 7 баллов

1. На волшебный конгресс пришло несколько математиков, кентавров и совят. Каждый математик имеет две руки и две ноги, каждый кентавр – один хвост, две руки и четыре ноги, а у каждого совёнка есть только один хвост и две ноги. Всего на конгрессе насчитали 15 хвостов и 94 руки. А сколько насчитали ног?

Решение. Пусть на конгресс пришли m математиков, k кентавров и s совят. Тогда хвостов у них всего $k + s = 15$, рук всего $2m + 2k = 94$, а ног

$$2m + 4k + 2s = 2(k + s) + (2m + 2k) = 30 + 94 = 124.$$

Критерии. Только верный ответ – 1 балл.

Только верный ответ с примером конкретных чисел – 2 балла.

2. На некотором острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Путешественник, попавший на этот остров, спросил каждого жителя про каждого другого, кем тот является. Всего он получил 24 ответа «он рыцарь» и 32 ответа «он лжец». Сколько рыцарей могло проживать на этом острове?

Решение. Заметим, что всего было получено 56 ответов. Если на острове живёт n человек, то ответов должно быть суммарно $n(n-1)$ – выбрать отвечающего, а затем задать вопрос про кого-то из оставшихся. Так как $56 = 8 \times 7$, на острове живёт суммарно 8 человек.

Рассмотрим фразу «он рыцарь». Её говорят только рыцари про рыцарей и лжецы про лжецов. Тогда, если на острове k рыцарей и $m = 8 - k$ лжецов, этот ответ будет произнесён ровно $k(k-1) + m(m-1)$ раз. Получаем уравнение

$$k^2 - k + 56 - 7k - 8k + k^2 = 24.$$

Оно преобразуется к $k^2 - 8k + 16 = 0$, что равносильно $(k-4)^2 = 0$, то есть $k = 4$.

Значит, на острове живёт ровно 4 рыцаря.

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

Только верный ответ с примером на 8 суммарных жителей и проверкой, что всё сходится – 1 балл.

Доказано, что на острове ровно 8 жителей – 2 балла.

Верно составлено уравнение на число рыцарей или лжецов – ещё 2 балла.

Не показано, что других решений нет (например, просто замечено, что $k = 4$ подходит, и ничего не сказано про другие возможные ответ) – минус 2 балла, то есть суммарно решение оценивается в 5 баллов, если выполнены предыдущие два критерия.

3. Дана таблица 5 на 5, раскрашенная в шахматном порядке. Можно ли расставить в её клетки числа 1, 2 и 3 таким образом, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел, стоящих на чёрных клетках, была равна сумме чисел, стоящих на белых?

Решение. Да, можно. Например, подходит расстановка

1	2	1	1	1
1	1	1	3	2
1	1	2	3	1
2	3	3	3	1
1	1	1	2	1

Критерии. Любой верный пример даже без проверки его корректности – 7 баллов.

Любой неверный пример или попытки доказательства невозможности такой расстановки – 0 баллов.

4. Найдите все такие натуральные числа a и b, что НОК(a, b) + НОД$(a, b) = a + b + 2$. Здесь НОК(a, b) и о НОД(a, b) – наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел a и b соответственно.

Решение. Заметим, что в данном равенстве на НОД делится НОК, сам НОД, числа a и b. Значит, на НОД делится и число 2. Следовательно, НОД$(a, b) = 1$ или НОД$(a, b) = 2$.

Если НОД$(a, b) = 1$, то НОК$(a, b) = ab$, а наше уравнение принимает вид

$$ab + 1 = a + b + 2$$

$$ab - a - b + 1 = 2$$

$$(a - 1)(b - 1) = 2$$

Произведение двух целых неотрицательных чисел может быть равно 2, только если одно из них равно 1, а второе 2. Значит, $(a, b) = (2, 3)$ или $(a, b) = (3, 2)$. Надо только заметить, что НОД этих чисел действительно равен 1, то есть это действительно решения начального уравнения.

Если же НОД$(a, b) = 2$, то НОК$(a, b) = ab/2$, а наше уравнение принимает вид

$$ab/2 + 2 = a + b + 2$$

$$ab = 2a + 2b$$

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4$$

$$(a - 2)(b - 2) = 4$$

Числа a и b чётны, так как их НОД равен 2, поэтому слева не могут стоять отрицательные числа. Так как 4 раскладывается на множители только как $4 = 2 \times 2 = 1 \times 4$, числа a и b являются либо парой (6, 3), либо парой (4, 4). Но в обеих этих парах НОД не равен 2, поэтому решений в данном случае нет.

Критерии. Только ответ или ответ с проверкой – 0 баллов.

За указание только одного ответа из пары симметричных баллы не снимаются.

Возможны другие рассуждения, нижестоящие критерии относятся к приведённому решению. Далее баллы суммируются

Доказано, что НОД$(a, b) = 1$ или НОД$(a, b) = 2$ – 2 балла.

Верно рассмотрен случай НОД$(a, b) = 1$ – 2 балла. За отсутствие проверки в этом случае баллы не снимаются.

Верно рассмотрен случай НОД$(a, b) = 2$ – 3 балла. За отсутствие проверки в этом случае снимается по баллу за каждую лишнюю полученную пару решений.

5. Катя хочет поставить в квадрат 11×11 числа от 1 до 121 змейкой так, чтобы числа, отличающиеся на 1, были соседними по стороне. А ещё она хочет, чтобы квадраты натуральных чисел (числа 1, 4, …, 121) находились в одном столбике. Получится ли у неё это сделать?

Решение. Докажем, что это невозможно. Предположим, такая змейка получилась, и мы собрали все квадраты в одном из столбцов (назовём его *квадратным*). Разобьём змейку на 10 компонент (2, 3), (5, 6, 7, 8), …, (101, ..., 120), состоящих из чисел, которые идут между соседними квадратами. Каждая такая компонента должна лежать по одну сторону от квадратного столбика, причём соседние компоненты должны лежать по разные стороны. Действительно, ведь прийти в квадратный столбик змейка может только слева или справа, а выйти, соответственно, только направо или налево.

Но тогда с одной стороны от квадратного столбика лежат компоненты из 2, 6, 10, 14 и 18 чисел (числа, лежащие между 1 и 4, 9 и 16, 25 и 36, 49 и 64, 81 и 100 соответственно). Суммарно они состоят из $2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50$ чисел. Однако, слева от квадратного столбика находится некоторый прямоугольник высоты 11, и площадь 50 он иметь не может. Противоречие.

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

Следующие баллы суммируются.

Идея рассмотреть соседние компоненты – 1 балл.

Замечено, что каждая компонента лежит с одной стороны от квадратного столбика – 1 балл.

Замечено, что соседние компоненты лежат по разные стороны – 1 балл.