Решения заданий Муниципального Этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024-25 г.г.
9 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

9.1. Вася вышел из пункта А в 10 часов 18 минут и, двигаясь с постоянной скоростью, пришёл в пункт Б в 13 часов 30 минут. В тот же день по той же дороге Петя вышел из пункта Б в 9 часов 00 минут и, двигаясь с постоянной скоростью, пришёл в пункт А в 11 часов 40 минут. Дорога пресекает реку, Вася и Петя подошли к мосту через эту реку одновременно, каждый со своей стороны. Вася ушёл с моста на одну минуту позже Пети. Когда они подошли к мосту?

Ответ. В 11 часов 00 минут.

Решение. Вася прошёл путь от А до Б за 192 минуты, а Петя – за 160 минут, значит, скорости Васи и Пети относятся, как 5 к 6. Отсюда следует, что Петя прошёл мост за 5 минут, а Вася – за 6, а длина моста составляет $\frac{1}{32}$ длины всего пути от А до Б.

В тот момент, когда Вася начал движение, Петя уже прошёл $\frac{78}{160}$ всего пути, поэтому между ним и Васей в этот момент было $\frac{82}{160}$ пути, из которых $\frac{1}{32}$ составляла длина моста. Следовательно, длина пути, пройденной ими от 10 часов 18 минут до момента вхождения на мост, равна $\frac{82}{160}-\frac{1}{32}=\frac{77}{160}$ всего пути. Ввиду того, что их скорости относятся, как 5 к 6, Вася прошёл из них $\frac{35}{160}$, а Петя $\frac{42}{160}$, что заняло у него как раз 42 минуты. Добавляем к 9 часам его старта 78 минут, которые он прошёл до старта Васи и 42 минуты, которые он прошёл после этого до моста, получим 11 часов 00 минут – момент его вступления на мост.

Критерии проверки. (●) Найдено соотношение скоростей Васи и Пети: 1 балл. (●) Найдена часть пути, пройденная Петей до старта Васи: 1 балл. (●) Определено, какую часть от общего пути составляет длина моста: 2 балла. (●) Определены части пути, которые прошли Вася и Петя к моменту вступления на мост: 2 балла. (●) Найдено время вступления их на мост: 1 балл.

9.2. В классе учатся 24 школьника, каждый из которых либо лгун (всегда лжёт), либо правдун (всегда говорит правду). На вопрос учителя: «Верно ли, что в вашем классе поровну лгунов и правдунов?» некоторые ответили «Да», а остальные – «Нет». Как учителю, зная ответ каждого ученика, определить, кто из них лгун, а кто - правдун?

Решение. Понятно, что ответы всех лгунов на вопрос учителя одинаковы между собой, и ответы всех правдунов на вопрос учителя тоже одинаковы между собой, но противоположны ответам лгунов. Следовательно, если ответов каждого типа поровну, то в классе поровну лгунов и правдунов, а если нет, то не поровну. Теперь, зная действительное положение дел, учителю легко установить, кем является каждый конкретный ученик. Если в классе лгунов и правдунов поровну, то те, кто ответил «Да» являются правдунами, а сказавшие «Нет» - лгунами. Если в классе лгунов и правдунов не поровну, то те, кто ответил «Нет» являются правдунами, а сказавшие «Да» - лгунами.

Критерии проверки. (●) Замечено, что что ответы всех лгунов на вопрос учителя одинаковы между собой, и ответы всех правдунов на вопрос учителя тоже одинаковы между собой, но противоположны ответам лгунов: 2 балла. (●) Разбираются два случая, когда ответов каждого типа поровну, и когда не поровну: 2 балла. (●) Сказано, как в каждом из этих случаев определять лгунов и правдунов: 3 балла.

9.3. На корпоративе у короля Артура всех его рыцарей сначала рассадили по 12 человек за круглые столы и по 7 человек за квадратные столы**.** Затем персонал подтащил ещё в сумме три стола, после чего всех рыцарей посадили уже по 11 человек за круглые и по 6 человек за квадратные столы. Можно ли, раздобыв ещё несколько столов, рассадить всех рыцарей уже по 10 человек за круглые и по 5 – за квадратные?

Ответ. Нет.

Решение. Обозначим количество круглых и квадратных столов, имевшихся сначала, за x и y соответственно, тогда общее количество рыцарей равно $S = 12x + 7y$. После того, как принесли ещё a круглых и b квадратных столов соответственно, где $a + b = 3$, то же количество стало возможным записать в виде $S = 11(x + a) + 6(y + b)$. Если после добычи ещё c круглых и d квадратных столов соответственно снова удалось всех рассадить как нужно, то $S = 10(x + a + c) + 5(y + b + d)$ – делится на 5. Тогда на 5 должно делиться и $S = 12x + 7y = 10x + 5y + 2(x + y)$, откуда следует что на 5 делится $2(x + y)$, а значит и $x + y$. Тогда на 5 должно делиться $S = 11(x + a) + 6(y + b) = 10(x + a) + 5(y + b) + (x + y) + a + b$, а значит и $a + b$=3 – противоречие.

Критерии проверки. (●) Замечено, что общее количество рыцарей делится на 5: 2 балла.

9.4. Внутри параллелограмма ABCD выбрана точка P такая, что равны величины углов CBP и CDP**.** Доказать, что тогда равны и величины углов BCP и BAP**.**

Доказательство. Проведём через точку P прямые, параллельные сторонам параллелограмма, обозначим точку пересечения прямой, параллельной стороне AB, со стороной BC за K, и точку пересечения прямой, параллельной стороне BC, со стороной CD за M, а со стороной AB – за T. Тогда треугольники BPK и DPM подобны по углам PBC=PDC по условию, и BKP=DMP, как углы с параллельными сторонами. В таком случае, равны отношения их соответствующих сторон: $\frac{BK}{DM} = \frac{KP}{MP}$.

Рассмотрим теперь пару треугольников СКР и АТР. Их углы СКР и АТР равны, как углы с параллельными сторонами. Отношения прилегающих к ним сторон $\frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{AT}} = \frac{\mathrm{MP}}{DM}$=$\frac{KP}{BK} = \frac{KP}{TP}$ равны, следовательно, треугольники СКР и АТР подобны. Из их подобия следует равенство их соответствующих углов ВСР=КСР и ВАР=ТАР**.**

Критерии проверки. (●) Доказано, что треугольники ВРК и DPM подобны: 3 балла.

9.5. Каждая клетка таблицы 7 на 7 окрашена в один из нескольких цветов так, что в каждой строке и в каждом столбце клетки окрашены не более, чем в два различных цвета**.** Какое максимальное число различных цветов могло быть использовано для окраски всех клеток таблицы?

Ответ. Восемь.

Решение. Пример правильной раскраски в восемь цветов: клетки одной из диагоналей таблицы окрашиваются в 7 разных цветов, а остальные клетки – в восьмой цвет.

Докажем, что в большее количество цветов клетки таблицы правильно раскрасить нельзя. Рассмотрим несколько случаев.

1) Клетки каждой строки окрашены ровно в один цвет. Тогда общее число цветов не больше семи. Дальше считаем, что в таблице есть строки, окрашенные в два цвета.

2) Если строка, окрашенная в два цвета, всего одна, то общее число цветов не больше восьми. Дальше считаем, что в таблице есть как минимум две строки, можно считать их первой и второй, окрашенные в два цвета каждая.

3) Если в каждой строке, окрашенной в два цвета, кроме первой, один из цветов совпадает с одним из цветов первой строки, то в таблице по-прежнему не больше восьми цветов.

4) Дальше считаем, что одна из строк, можно считать её второй, окрашена в два цвета, отличных от цветов первой строки. В таком случае все клетки каждого столбца окрашены в один из четырёх цветов, уже использованных в первой и второй строках. При этом количество использованных цветов даже не превосходит четырёх.

Критерии проверки. (●) Приведён пример правильной раскраски таблицы в восемь цветов: 2 балла. (●) Докажем, что в большее количество цветов клетки таблицы правильно раскрасить нельзя: 5 баллов.