Решения заданий Муниципального Этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024-25 г.г.
9 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

11.1. Найдите все значения параметра α такие, что из выполнимости неравенства $x+y>\alpha$ следует выполнимость неравенства $\frac{y}{x}+1>\alpha-x$ при всех положительных x.

Ответ. $0 \le \alpha \le 4$.

Решение. Если из выполнимости неравенства $x+y>\alpha \Leftrightarrow y>\alpha-x$ при всех положительных x следует выполнимость неравенства $\frac{y}{x}+1>\alpha-x \Leftrightarrow y>(\alpha-1)x-x^2$, то при каждом положительном значении x луч $(\alpha-x,+\infty)$ содержится в луче $((\alpha-1)x-x^2,+\infty)$. Это значит, что неравенство $\alpha-x \ge (\alpha-1)x-x^2$, равносильное $x^2-\alpha x+\alpha \ge 0$, выполняется при всех $x>0$. Если бы значение параметра α было отрицательным, то при маленьких x левая часть неравенства тоже была бы отрицательна, поэтому $\alpha \ge 0$. В частности, отсюда следует, что минимальное значение квадратного многочлена $x^2-\alpha x+\alpha$ достигается при $x=\frac{\alpha}{2} \ge 0$. Следовательно, неравенство $x^2-\alpha x+\alpha \ge 0$ при всех $x>0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha-\frac{\alpha^2}{4} \ge 0 \Leftrightarrow \alpha \in [0,4]$.

Критерии проверки. (●) Без обоснования рассматривается сразу только случай $\alpha \ge 0$: снимаем 2 балла. (●) Упущено одно из крайних значений $\alpha = 0;\ 2$: минус 2 балла. Если упущены оба крайних значения: минус 3 балла.

11.2. На столе лежат 13 карточек, занумерованных натуральными числами от 1 до 13. Вася и Петя по очереди берут со стола по одной карточке, первым берёт Вася, он же забирает последнюю карточку. Его цель – добиться того, чтобы сумма чисел на взятых им семи карточках была простым числом. Сможет ли Петя ему в этом помешать?

Ответ. Да.

Решение. Среди всех натуральных чисел от 1 до 13 семь нечётных и 6 чётных. Петя должен каждый раз брать карточку с числом той же чётности, что на карточке, взятой перед ним Васей. Он не сможет сделать так только, если все карточки с нечётными числами уже взяты (Вася своим крайним ходом забрал последнюю), тогда, если чётные ещё остались, Петя может взять любую из них. Если их тоже не осталось, игра заканчивается. В любом случае, в итоге Васе достанутся ровно 4 карточки с нечётными номерами: согласно стратегии Пети, разница между числом нечётных карточек у него и у Васи не больше одного, если бы Вася набрал их не меньше 5, то Петя – не меньше 4, всего не меньше 9, а их 7 – противоречие. Если же Вася взял бы не больше 3 нечётных карточек, то и Петя - не больше 3, всего 6, что меньше 7 – снова противоречие.

Таким образом, у Васи в итоге окажутся ровно 4 нечётных карточки, значит его сумма будет чётным числом, большим двух, то есть составным числом. Петя смог помешать затее Васи.
Критерии проверки. (●) Предложена верная стратегия для Пети: 3 балла. (●) Чёткое и явное обоснование того, что при этом Васе достанутся ровно 4 нечётных карточки: 3 балла. (●) Показано, что сумма номеров карточек Васи не может быть простой: 1 балл.

11.3. В остроугольном треугольнике ABC величина угла BAC равна 60 градусов и сторона AB больше стороны AC. Обозначим за I и H центр вписанной окружности и точку пересечения высот треугольника ABC соответственно. Доказать, что $2\cdot\angle AHI = 3\cdot\angle ABC$.
Доказательство. Сначала заметим, что точка I лежит внутри треугольника AHB. Из того, что сторона AB больше стороны AC следует, что величина угла ACB больше величины угла ABC. Сумма этих углов равна 120 градусов, поэтому, в частности, угол ACB больше 60 градусов, а угол ABC меньше 60 градусов. Тогда угол ABH, равный $90-\angle BAC=30$ градусам, больше угла ABI, равного половине $\angle ABC<60$. С другой стороны, угол BAI, равный 30 градусам, меньше угла $BAH=90-\angle ABC>90-60=30$.

Выразим величину угла AHI через величины углов треугольника ABC, как разность между углом $\angle AHB=180-(90-\angle ABC)-(90-\angle BAC)=\angle ABC+\angle BAC=180-\angle ACB$ и углом $\angle BHI$.
Сначала заметим, что четырёхугольник BIHC вписанный, так как $\angle BHC=180-(90-\angle ACB)-(90-\angle ABC)=\angle ABC+\angle ACB=180-\angle BAC=120$ градусов, и $\angle BIC=180-\frac{1}{2}\angle ACB-\frac{1}{2}\angle ABC=180-\frac{1}{2}(180-60)=120=\angle BHC$. Тогда величина угла BHI равна величине угла BCI, как вписанного, опирающегося на хорду BI, то есть равна $\frac{1}{2}\angle ACB$. Следовательно, величина угла AHI равна $180-\angle ACB-\frac{1}{2}\angle ACB=180-\frac{3}{2}\angle ACB=180-\frac{3}{2}(120-\angle ABC)=\frac{3}{2}\angle ABC$, что и требовалось доказать.
Критерии проверки. (●) Доказано, что точка I лежит внутри треугольника AHB: 2 балла. (●) Доказано, что четырёхугольник BIHC вписанный: 2 балла. (●) Угол AHI представлен, как разность между $\angle AHB$ и углом $\angle BHI$: 1 балл. (●) Доказано, что величина угла BHI равна $\frac{1}{2}\angle ACB$: 2 балла.

11.4. Найти все решения в целых числах уравнения: $1+x^2y=x^2+2xy+2x+y$.
Ответ. (0,1), (-1, -1), (3,7), (1, -1), (2,-7).
Решение. Запишем уравнение в виде: $(x^2-1)(y-1)=2x(y+1)$, разложим левую часть на множители: $(x-1)(x+1)(y-1)=2x(y+1)$. Если $x=0$, то $y=1$ – решение уравнения. Дальше считаем $x\neq 0$. Число x, делящее правую часть, должно делить и левую часть, следовательно, ввиду взаимной простоты чисел $x-1, x$ и $x+1, x$, либо $x=\pm 1$, либо x делит $y-1$.

Если $x = \pm 1$, получаем соответственно $y = -1$ и $y = -1$ в обоих случаях, два решения. Далее $x \neq 0, \pm 1$, и x делит $y - 1$.

Запишем $y = kx + 1$ для некоторого целого k. Подставим это выражение в уравнение, получим $(x-1)(x+1)k = 2(kx+2)$. Из последнего равенства следует, что k является целым делителем числа 4, то есть равно одному из чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Преобразуем уравнение к виду $x^2 - 2x - 1 - \frac{4}{k} = 0$ и аккуратно переберём все случаи.

1) $k = 1$. Тогда $x^2 - 2x - 5 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$ – целых решений нет.

2) $k = -1$. Тогда $x^2 - 2x + 3 = 0$ - решений нет.

3) $k = 2$. Тогда $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4} = -1; 3$ –два решения: (-1, -1), (3,7).

4) $k = -2$. Тогда $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$ – решение: (1, -1).

5) $k = 4$. Тогда $x^2 - 2x - 2 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ – целых решений нет.

6) $k = -4$. Тогда $x^2 - 2x = 0$, $x_{1,2} = 0; 2$ – два решения: (0, 1), (2,-7).

Критерии проверки. (●) Угаданы не меньше, чем 3 верных ответа: 1 балл. (●) Получено соотношение $y = kx + 1$: 3 балла. (●) Доказано, что k равно одному из чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 4$: 2 балла. (●) Верно разобраны все случаи, получены правильные ответы: 2 балла. (●) Если при этом часть ответов упущены: снимаем 1 балл.

11.5. Даны натуральные числа $m \geq n \geq 1$**.** Найти такое минимальное число N, зависящее от m и n, что среди любых N человек обязательно найдутся либо m пар различных знакомых человек (все $2m$ человек в парах различны), либо n пар различных незнакомых человек (все $2n$ человек в парах различны).

Ответ. $N = 2m + n - 1$.

Доказательство. Докажем, что при количестве людей $N \leq 2m + n - 2$ требование условия может не выполняться. Так будет в компании, где $2m - 1$ человек знакомы каждый друг с другом, а остальные $n - 1$ вообще ни с кем не знакомы. Тогда все знающие кого-либо содержатся среди первых $2m - 1$ людей и не могут образовывать m пар различных знакомых человек. А каждая из n пар различных незнакомых человек должна содержать не меньше, чем по одному человеку среди вторых $n - 1$ различных попарно незнакомых человек, что невозможно. Ясно, что условие задачи не выполнится и для любой компании, получающейся из данной удалением любых её членов.

Докажем по индукции, что в любой компании из $N \geq 2m + n - 1$ человек требуемое в условии возможно. Шаг индукции будем делать от пары $(m - 1, n - 1)$ к паре (m, n), в качестве базы индукции докажем утверждение задачи для всех пар вида $(m, 1), m \geq 1$.

База индукции. Докажем, что в любой компании из не менее, чем $2m$ человек, либо найдутся m пар различных знакомых людей, либо найдутся два незнакомых человека. Для этого разобьём компанию произвольным образом на m пар различных людей. Если в каждой такой паре люди знакомы, выполнится первое условие, а если хотя бы в одной такой паре люди незнакомы, выполнится второе условие.

Шаг индукции. Рассмотрим произвольную компанию из не менее, чем $2m+n-1, m \geq n \geq 2$ человек. Докажем, что возможны три случая: (1) в компании все знают всех, (2) в компании никто не знает никого, (3)в компании найдётся человек А, который знает некоего члена компании Б, но не знает некоторого члена компании В. В первых двух случаях шаг индукции не нужен, в первом случае можно взять любые n пар, во втором – любые m пар

. Далее докажем, что в случае, когда не выполнены случаи (1) и (2), выполнен случай (3). Если бы случай (3) был не выполнен, то каждый член компании либо знал в ней всех, либо не знал никого. Одновременно в компании не могут быть два члена, один из которых знает всех, а другой – никого, так как они были бы одновременно знакомы и незнакомы, что в жизни бывает, но в математике невозможно. Следовательно, тогда должны иметь место либо случай (1), либо случай (2), противоречие. Итак, далее в компании найдётся человек А, который знает некоего члена компании Б, но не знает некоторого члена компании В.

Удалим всех троих А, Б и В из компании, после чего в ней останется $2m+n-1-3=2(m-1)+(n-1)-1$ человек. По предположению индукции, в ней либо найдутся $m-1$ пар различных знакомых человек, либо $n-1$ пар различных незнакомых человек. В первом случае добавим к $m-1$ паре различных знакомых человек пару знакомых А и Б, получим m пар знакомых, во втором случае к $n-1$ пар различных незнакомых человек пару незнакомых А и В, получим n пар различных незнакомых. Следовательно, условие задачи выполнено для любой компании из не менее, чем $2m+n-1$ человек. По индукции, утверждение доказано.

Критерии проверки. (●) Приведён правильный ответ $N=2m+n-1$, полученный рассмотрением примеров для малых m, n: 1 балл. (●) Доказано, что при любом количестве людей $N \leq 2m+n-2$ требование условия может не выполняться: 2 балла. (●) Доказано, что в любой компании из $N \geq 2m+n-1$ человек требуемое в условии возможно: 5 баллов. (●) Из них стоимость доказательства утверждения, что в компании найдётся человек А, который знает некоего члена компании Б, но не знает некоторого члена компании В: 2 балла.