Решения заданий Муниципального Этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024-25 г.г.
10 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

10.1. Можно ли найти три различных ненулевых действительных числа a, b, c таких, что каждое из трёх квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0, cx^2 + ax + b = 0, bx^2 + cx + a = 0$ имеет по два различных корня, один из которых положительный, а другой – отрицательный?

Ответ. Нет.

Решение. Заметим, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня, один из которых положительный, а другой – отрицательный, тогда и только тогда, когда $ac < 0$. Действительно, если $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$ - корни уравнения, то при положительном a значения многочлена для всех $x_1 < x < x_2$ отрицательны, в частности, и значение в нуле, равное c. Аналогично, при отрицательном a значения многочлена для всех $x_1 < x < x_2$ положительны, в частности, и значение в нуле, равное c. В обоих случаях числа a и c имеют разные знаки, поэтому $ac < 0$.

Замечание. Этот факт можно доказать, используя теорему Виета. Тогда $\frac{c}{a} = x_1x_2 < 0$, а знак произведения ac совпадает со знаком частного $\frac{c}{a}$.

Если бы требуемое в условии было возможно, то выполнялись бы три неравенства: $ac < 0, bc < 0, ac < 0$. Тогда произведение трёх отрицательных чисел из левых частей неравенств было бы равно $a^2b^2c^2$, что больше нуля, а это невозможно. Полученное противоречие доказывает, что требуемых в условии трёх различных ненулевых действительных чисел a, b, c найти нельзя.

Критерии проверки. (●) Доказано, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет по два различных корня, один из которых положительный, а другой – отрицательный, тогда и только тогда, когда $ac < 0$: 3 балла.

10.2. В классе 29 учеников, среди которых более 15 девочек**.** Во время первого антракта в театре каждый мальчик купил пирожное, а каждая девочка – мороженное. А во втором антракте наоборот, каждый мальчик купил мороженное, а каждая девочка – пирожное. Оказалось, что во втором антракте всеми школьниками в сумме было потрачено на 620 рублей больше, чем в первом. Сколько мальчиков в этом классе? Минимальной денежной единицей считается 1 рубль.

Ответ. 12.

Решение. Обозначим количество мальчиков в классе за $x \leq 13$, тогда девочек $29 - x$, стоимость одного пирожного за a рублей, а одной порции мороженного за b рублей. Тогда в первом антракте дети оставили в буфете $ax + b(29 - x)$, а во втором $bx + a(29 - x)$. Разница между ними равна $(b - a)(2x - 29) = 620 = 4 \cdot 5 \cdot 31$. Вторая скобка является отрицательным

нечётным числом, делящим число $5 \cdot 31$, то есть должно быть равно одному из чисел $-1, -5, -31, -155$. Соответственно, x должен принимать одно из значений: 14, 12, - 1, - 63. Два последних варианта отбрасываем, как трудно реализуемые на практике, а первый – потому что девочек при этом будет всего 15, а должно быть больше. Следовательно, $x = 12$ – столько мальчиков в классе.
В качестве **примера** можно взять любой, когда мальчиков 12, девочек 17, а пирожное стоит на 124 рубля дороже, чем мороженное, например, мороженное стоит 46 рублей, а пирожное – 170 рублей.
Критерии проверки. (●) Получена формула, аналогичная формуле $(b-a)(2x-29) = 620 = 4 \cdot 5 \cdot 31$: 3 балла. (●) Доказано, что вторая скобка равна одному из чисел $-1, -5, -31, -155$: 2 балла. (●) Отсюда получено, что в классе 12 мальчиков: 2 балла. (●) Если при этом по невнимательности не отсеяна возможность, когда x=14, а девочек 15: минус 1 балл. (●) Если ничего не говорится о каком либо примере с 12 мальчиками и конкретными ценами на мороженное и пирожное: снимаем 1 балл.

10.3. На плоскости отмечена вершина A квадрата ABCD и точки K и M соответственно на сторонах BC и CD (не на продолжениях сторон), отличные от вершин**.** Сами вершины B, C и D стёрты. С помощью циркуля и линейки восстановите вершины B, C и D квадрата.
Решение. 1) Построим окружность **Ω** с диаметром KM, вершина C лежит на ней, так как угол KCM – прямой, причём лежит она на дальней от вершины A её дуге.
2) Заметим, что диагональ AC является биссектрисой угла KCM, следовательно делит пополам ближнюю к A дугу окружности **Ω**, не содержащую вершину C, то есть проходит через середину H этой дуги. Строим H, как точку пересечения серединного перпендикуляра к отрезку KM с ближней к A дугой окружности **Ω**.
3) Из пунктов 1) и 2) следует, что точки A, H и C лежат на одной прямой, поэтому прямая AH пересекает дальнюю от A дугу **Ω**, не содержащую H, в вершине C.
4) Строим вершины B и D, как точки пересечения окружности с диаметром AC с прямыми CK и CM. Построение завершено.
Критерии проверки. (●) Пункт 1): 2 балла. (●) Пункт 2) 1 балл. (●) Пункт 3): 3 балла. (●) Пункт 4): 1 балл.

10.4. Найти все решения в целых числах уравнения: $x - y = x^2 + xy + y^2$**.**
Ответ. $(0,0), (0,-1), (1,0), (2,-1), (1,-2), (2,-2)$ – шесть решений.
Решение. Рассмотрим данное уравнение, как квадратное относительно переменной x, с коэффициентами, зависящими от y : $x^2 + (y-1)x + y^2 + y = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $-3y^2 - 6y + 1$. Корни уравнения $-3y^2 - 6y + 1 = 0$ равны $-1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, что больше -3 и меньше 1. Если уравнение имеет решения, то дискриминант должен быть неотрицателен, что

возможно только при y =0,-1,-2. Подставляем найденные значения для y в исходное уравнение, получим: при y =0 будет $x = x^2$, откуда $x = 0$ или $x = 1$, при при y =-1 будет $2x = x^2$, откуда $x = 0$, или $x = 2$. При y =-2 будет $x^2 - 3x + 2 = 0$, откуда $x = 1$, или $x = 2$.
Таким образом, получаем шесть решений:
$(0,0), (0,-1), (1,0), (2,-1), (1,-2), (2,-2)$.
Критерии проверки. (●) Угаданы не меньше, чем 4 верных ответа: 1 балл.
(●) Получено ограничение y =0,-1,-2: 4 балла. (●) Потеряно 1-2 решения: снимаем по 1 баллу за каждое.

10.5. В команде из 46 хоккеистов некоторые игроки входят в состав игровых троек**.** Любые две тройки могут пересекаться не более, чем по одному игроку. Доказать, что можно выбрать десять игроков команды, никакие два из которых не входят вместе в состав никакой тройки.
Доказательство. Будем выбирать этих десять игроков последовательно. Первого игрока А выбираем произвольно. Затем добавим к нему любого второго игрока Б и исключим из рассмотрения возможного третьего участника тройки, куда входят А и Б, если таковая есть. Из оставшихся, не менее, чем 43 игроков выберем третьего участника десятки, назовём его С и исключим из рассмотрения двух возможных третьих участников двух возможных троек, включающих С и А, и С и В. Из оставшихся 40 игроков выберем четвёртого участника десятки, назовём его D, исключим из рассмотрения трёх возможных третьих участников трёх возможных троек, включающих D и A, D и B, D и C. Продолжим этот процесс дальше, при нахождении n-ого участника десятки исключая каждый раз из рассмотрения возможных третьих участников n-1 возможных троек, образованных n – ым участником десятки со всеми предыдущими уже выбранными участниками десятки. На каждом n-ом шаге, начиная с $n \geq 2$, вместе с только что выбранным n-ым участником из команды для дальнейшего рассмотрения исключаются не более n игроков. Выбрав 9 игроков десятки, мы исключим из рассмотрения не более 1+2+…+9=45 хоккеистов, поэтому можем включить любого из оставшихся, как последнего члена десятки.
Критерии проверки. (●) Высказана идея последовательного выбора игроков десятки, с исключением из рассмотрения тех, кто мог входить в тройки с выбранными ранее: до 3 баллов, если идея доводится до верного решения.