11 класс

1. Условие. Любитель астрономии, отдыхая на Мальдивах, обнаружил, что один и тот же спутник, обращающийся по экваториальной орбите, прошел точку зенита в 23:00, а потом в 4:00. Определите радиус орбиты спутника, считая ее круговой.

1. Решение. Из условия синодический период обращения спутника S равен 5 часам. Тогда:

$$S = \frac{TT_З}{T \pm T_З},$$

где T – сидерический период обращения спутника, $T_З$ - период обращения Земли вокруг своей оси. Знаки «минус» и «плюс» в знаменателе соответствуют направлениям обращения спутника — сонаправленно с направлением вращения Земли или противонаправленно ему. Отсюда:

$$T = \frac{ST_З}{T_З \pm S} = 4.1 \text{часа} \text{или} 6.3 \text{часа}.$$

Радиус орбиты найдем из III закона Кеплера, сравнивая спутник, например, с Луной:

$$a = a_{\text{Луна}} \cdot \left(\frac{T}{T_{\text{Луны}}}\right)^{\frac{2}{3}} = 13.0 \text{или} 17.4 \text{тыс. км}$$

1. Критерии оценивания

2 балла — утверждение, что синодический период равен 5 часам

2 балла — формула для синодического периода с учётом двух возможных знаков (без учёта — 1 балл)

2 балла — определение сидерического периода спутника в двух вариантах (в одном варианте — 1 балл)

2 балла — определение радиусов орбит через третий закон Кеплера (один вариант — 1 балл)

2. Условие. Предположим, что изображение Плутона, полученное прибором NIRSpec космического телескопа «Джеймс Уэбб», имеет, без учета дифракции, размеры 6x6 пикселей на ПЗС-матрице прибора. Размеры пикселя – 18 мкм x 18 мкм. Диаметр зеркала – 6,5 м. Диаметр Плутона – 2380 км, расстояние от телескопа до Плутона – 40 а.е. Оцените: а) фокусное расстояние оптической системы телескоп-прибор; б) диаметр изображения звезды в пикселях на ПЗС-матрице, если наблюдения ведутся на длине волны 1 мкм.

2. Решение. Диаметр изображения Плутона равен 6 · 18 мкм = 108 мкм.

Поскольку телескоп с ПЗС-матрицей не имеет окуляра, угловой размер Плутона равен угловому размеру изображения Плутона при наблюдении из центра входного отверстия.

Из подобия треугольников «Плутон – центр объектива» и «изображение – центр объектива» можем сразу оценить требуемое фокусное расстояние:

$$\frac{40\text{а. е.} \cdot 108\text{мкм}}{2380\text{км}} \approx 270\text{м}. (4\text{балла})$$

Диаметр изображения звезды для нашей задачи определяется дифракционным пределом (2 балла).

Дифракционный предел:

$$\frac{1\text{мкм}}{6{,}5\text{м}} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-7}. (1\text{балл})$$

Диаметр изображения звезды в пикселях:

$$\frac{270\text{м} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-7}}{18\text{мкм}} \approx 2{,}3\text{или}3\text{пикселя}. (1\text{балл})$$

2. Критерии оценивания:

1 балл — построение хода лучей (например, рисунок «объект-объектив-фокальная плоскость»)

1 балл — вывод о равенстве угловых размеров объекта и изображения или о подобии треугольников

2 балла — выражение и расчёт фокусного расстояния

2 балла — утверждение, что диаметр изображения звезды определяется дифракционным пределом

1 балл — расчёт дифракционного предела; наличие или отсутствие множителя 1,22 в формуле не влияет на оценку решения

1 балл — расчёт диаметра изображения звезды в целых пикселях; если округление произведено вниз, этот балл не ставится, даже если дробное значение правильно.

3. Условие. Двойная система Gaia DR3 3425577610762832400 состоит из красного гиганта с массой в 2,7 солнечной массы и невидимого объекта – предположительно, черной дыры – массой 3,6 массы Солнца. Орбитальный период системы – 880 суток, эксцентриситет – 0,05. Определите большие полуоси орбит каждого из компонентов двойной системы вокруг центра масс (укажите, какой радиус какому компоненту принадлежит), а также максимальную относительную скорость компонентов (относительно друг друга).

3. Решение. По 3-му закону Кеплера находим большую полуось двойной системы (в системе отсчета покоящейся одной из компонент):

$$\sqrt[3]{(2{,}7 + 3{,}6) \cdot (880/365)^2} \approx 3{,}3 \text{а. е.} (1 \text{балл})$$

Произведения масс компонентов на большие полуоси их орбит одинаковы (условие центра масс). Зная это, находим большие полуоси орбит компонентов:

$$\frac{3{,}3 \cdot 2{,}7}{2{,}7 + 3{,}6} \approx 1{,}4 \text{а. е. учернойдыры.} (2 \text{балла})$$

и

$$\frac{3,3 \cdot 3,6}{2,7 + 3,6} \approx 1,9 \text{а. е. у гиганта. (2 балла)}$$

Максимальная относительная скорость компонентов достигается, когда один из компонентов находится в перицентре орбиты в системе отсчета неподвижного второго компонента (или, что то же самое, оба компонента находятся в перицентрах своих орбит вокруг центра масс). (1 балл)

Находим эту скорость (например, используя орбитальную скорость Земли 30 км/с):

$$30 \cdot \sqrt{\frac{(2,7 + 3,6) \cdot (1 + 0,05)}{3,3 \cdot (1 - 0,05)}} \approx 44 \text{ км/с. (2 балла)}$$

3. Критерии оценивания.

1 этап (5 баллов): найдены большие полуоси орбит каждого из компонентов. Запись обобщенного 3 закона Кеплера – 1 балл, правильный результат – по 2 балла за ответ. Если участник приписывает большую полуось более тяжелому компоненту (или меньшую более легкому), то за этап – не более 1 балла.

Второй этап оценивается в полной мере, с использованием полученных участником на первом этапе результатов, в т.ч. ошибочных.

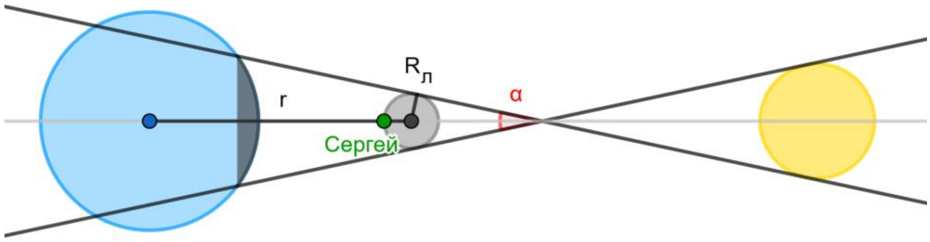
2 этап (3 балла): определение максимальной относительной скорости. Правильное понимание взаимной конфигурации компонентов в момент максимальной относительной скорости (рисунок или формула и дальнейшие расчеты или словесное описание) – 1 балл. Правильный результат – 2 балла.

В авторском решении указан лишь один из возможных вариантов расчета скорости. Участник может применить любой другой, адекватный задаче. При этом ответ, за счет округлений, может слегка отличаться от авторского.

4. Условие. Лунный наблюдатель Сергей видит Землю ровно у себя над головой. В некоторый момент некоторого солнечного затмения центры Земли, Луны и Солнца находятся на одной прямой. Оцените наблюдаемую Сергеем долю диска Земли, на которой видна лунная полутень. Искривлением тени на поверхности Земли пренебречь. Нарисуйте схему затмения, укажите, где находится наблюдатель и область полутени.

4. Решение.

Полутень — область затмения, где Луна покрывает лишь часть Солнца. Её граница будет проходить там, где видимые диски Луны и Солнца касаются.



Из геометрии, радиус полутени L зависит от расстояния до Земли r, размера Луны Rл и углового размера Солнца α следующим образом:

$$L \approx R_л + \frac{\alpha}{2} \cdot r = 1740 \text{ км} + 384400 \text{ км} \cdot \frac{9.33 \cdot 10^{-3}}{2} = 3530 \text{ км}$$

Пренебрегая искривлением поверхности Земли, Сергей видит Землю как диск радиусом 6371 км. Радиус тени составляет 3530 км. Найдем отношение видимой площади полутени к площади Земли.

$$\frac{\pi L^2}{\pi R_\oplus^2} = \left(\frac{3530}{6371}\right)^2 = 0.31$$

4. Критерии оценивания

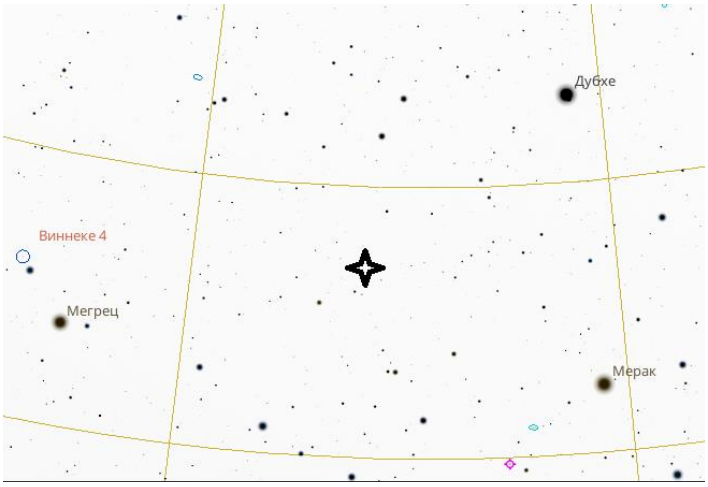
3 балла — схема затмения с указанием наблюдателя и области полутени

2 балла — выражение для радиуса полутени из геометрии треугольников на схеме

1 балл — вычисление радиуса области полутени (3530 ± 200 км)

2 балла — определение доли площади видимого диска, занятой полутенью (0,31±0,05)

5. Условие. Наблюдая ночное небо, вы внезапно заметили вспышку явно неземного происхождения и отметили на обрывке звёздной карты её местоположение относительно ярких звёзд (ваша отметка — это фигура в центре рисунка). Определите с хорошей точностью координаты источника вспышки — склонение и прямое восхождение. В каком созвездии произошла вспышка?



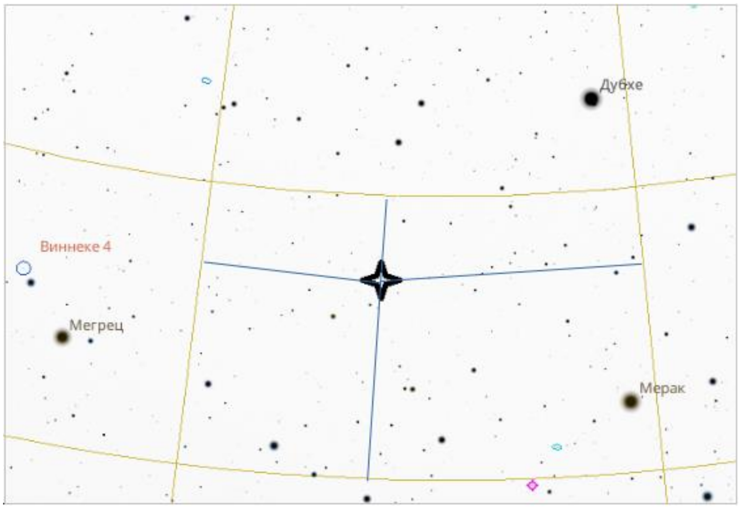
Координаты ярких звёзд на карте:

- Дубхе — $\delta = +61^0\ 45'\ 03''$, α = 11ч 03м 44с
- Мерак — $\delta = +56^0\ 22'\ 57''$, α = 11ч 04м 51с
- Мегрец — $\delta = +57^0\ 01'\ 57''$, α = 12ч 15м 26с

5. Решение. Дубхе, Мегрец и Мерак — три ярких звёзды ковша Большой Медведицы. То есть дело происходит в северном полушарии, и по линиям на фрагменте звёздной карты понятно, что горизонтальные дуги — это линии постоянного склонения, а вертикальные прямые — это линии постоянного прямого восхождения.

Заметим также, что прямое восхождение звезды больше, чем у Дубхе и Мерака. Это означает, что прямое восхождение растёт справа налево, не так, как обычная горизонтальная ось координат.

По координатам звёзд легко понять, что правая вертикальная линия соответствует прямому восхождению 11ч, а левая — прямому восхождению 12ч. Аналогично понимаем, что верхняя дуга — это линия склонения +60^o, а нижняя — +50^o.



Проведём четыре перпендикуляра к линиям из точки вспышки. Длины этих отрезков с хорошей точностью равны длинам соответствующих дуг, то есть по отношению длин отрезков можно определить координаты вспышки по склонению и прямому восхождению.

Отношение длин горизонтальных отрезков равно 7 / 10, вертикальных — 4 / 15. Это означает, что склонение точки вспышки равно 50^o + 15 / (4+15) · 10^o = 57,9^o. Аналогично, прямое восхождение (отсчитывается справа налево!) равно 11ч + 10 / (10+7) · 1ч = 11,59 ч = 11ч 35м.

Участники имеют право пользоваться другими методами геометрического определения координат, дающими сравнимую точность (±1^o по склонению, ±5м по прямому восхождению).

5. Критерии оценивания

2 балла — созвездие Большой Медведицы

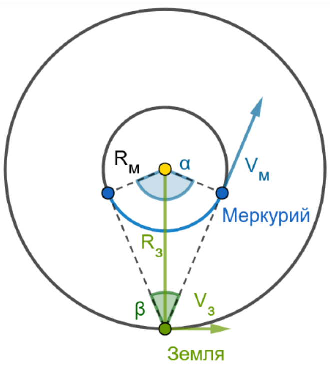
2 балла — привязка линий на карте к «круглым» значениям склонения и прямого восхождения; если линии прямого восхождения перепутаны, 1 балл

2 балла — вычисление относительной позиции точки вспышки по склонению и прямому восхождению через отношение длин отрезков, либо другим аналогичным способом

2 балла — вычисление точных координат — 1 б за склонение, 1 б за прямое восхождение.

6. Условие. Вычислите минимальное время, которое проходит между максимальными элонгациями Меркурия. Определите угловое расстояние, которое проходит Меркурий за этот период для наблюдателя с Земли относительно далёких звёзд. Орбиту Меркурия считайте круговой. Нарисуйте схему конфигураций.

6. Решение. Чтобы решить задачу, необходимо перейти в систему отчета, где отрезок, соединяющий Землю и Солнце, неподвижен. В такой системе отсчёта Меркурий обращается вокруг Солнца с синодическим периодом.



Найдем длину дуги, которую Меркурий проходит между точками максимальной элонгации, время ее прохождения и угловой размер дуги для земного наблюдателя. Сделать это можно из геометрических соображений.

$$\alpha = 2 \arccos (Rм / Rз) = 2 \arccos 0.387 = 134.5^{o}$$

$$t = \alpha / 360^{o} \cdot 115.9 = 43.3 \text{ сут}$$

$$\beta = 180^{o} - 134.5^{o} = 45.5^{o}$$

Теперь определим смещение Меркурия относительно звезд. Относительно земного наблюдателя Меркурий сместился не только на из-за своего движения (угол β), но и за счёт смещения Земли относительно Солнца за этот период. Или, с точки зрения нашей системы отсчёта, за счёт смещения далёких звёзд относительно Солнца. Полный оборот звёздная сфера в нашей системе отсчёта делает, очевидно, за сидерический год, поэтому рассчитаем смещение звёзд в нашей системе относительно Солнца за 43,3 суток:

$$\gamma = 43.3 \cdot 360^{o} / 365.256 = 42.7^{o}$$

Вычтем смещение звёзд из смещения Меркурия, получив итоговый ответ.

$$\beta - \gamma = 45.5^{o} - 42.7^{o} = 2.8^{o}$$

6. Критерии оценивания

2 балла — схема конфигураций Меркурия

1 балл — переход в синодическую систему отсчёта (Земля и Солнце неподвижны)

1 балл — вычисление длины дуги между максимальными элонгациями

1 балл — вычисление времени прохождения Меркурием этой дуги

2 балла — определение угла смещения Меркурия для земного наблюдателя

1 балл — учёт смещения Солнца (Земли), итоговый ответ