Решения заданий Муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников 2025-26 г.г. по математике

Каждое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

9 класс

9.1. Можно ли записать все натуральные числа от 1 до 15 по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом? А можно ли так записать все числа от 1 до 16?

Ответ. Числа от 1 до 15 так записать нельзя, а числа от 1 до 16 - можно.

Решение. Сумма двух различных чисел одной чётности будет чётным числом, большим 2, поэтому не может быть числом простым. Следовательно, для выполнения условия числа должны быть записаны с чередованием чётных и нечётных: после каждого чётного идёт нечётное и наоборот. В таком случае чётных и нечётных должно быть одинаковое количество, а общее количество чисел должно быть чётным, что для чисел от 1 до 15 не выполняется. Следовательно, их так записать нельзя.

А числа от 1 до 16 так записать можно, вот один из примеров: 1,2,3,4,7,6,5,14,15,16,13,10,9,8,11,12.

Критерии проверки. ● Доказана невозможность записи чисел от 1 до 15 через чётность: 3 балла. ● Построен верный пример для чисел от 1 до 16: 4 балла. ● Если в примере всего в одном месте сумма соседних чисел не простая: 1 балл. ● Если в примере больше одной не простой суммы: 0 баллов.

9.2. Пусть x и y – действительные числа, одно из которых больше 2, и выполняется неравенство $xy + 4 > 2(x + y)$. Докажите, что тогда $xy > x + y$.

Доказательство. Запишем неравенство из условия в виде: $xy - 2(x + y) + 4 = (x - 2)(y - 2) > 0$. По условию, одна из скобок больше 0, следовательно, вторая тоже, поэтому оба числа больше 2. А теперь запишем неравенство, которое нужно доказать, в похожем виде: $xy > x + y \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) > 1$. Последнее неравенство выполнено, так как обе скобки в его левой части больше 1.

Критерии проверки. ● Доказано, что оба числа больше 2: 3 балла.

9.3. Пусть ABCDE – правильный пятиугольник (у которого равны все стороны и равны все углы), а F – точка пересечения его диагоналей AC и BD. Точка P делит диагональ AD в отношении 2 к 1, считая от вершины A, а точка M – середина стороны DE. Докажите, что точки F, P, M лежат на одной прямой.

Доказательство. 1. В равнобедренном треугольнике BCD угол при вершине C равен 540°/5=108°, поэтому углы BDC и DBC при основании равны по 36°.

Следовательно, угол EDB равен 108°-36°=72°, и его сумма с углом AED=108° равна 180°, значит, диагональ BD параллельна стороне AE. Аналогично, диагональ AC параллельна стороне DE, поэтому четырёхугольник AFDE является параллелограммом.

2. В параллелограмме AFDE соединим вершину F с точкой M - серединой стороны DE, точку пересечения отрезка FM с диагональю AD обозначим за G. Треугольники AFG и DMG подобны с коэффициентом 2, поэтому отношение длин их соответствующих сторон AG и GD равно 2, то есть отношению длин отрезков AP и PD. Следовательно, точки P и G совпадают, поэтому точки F, P, M лежат на одной прямой.

Критерии проверки. ● Доказано, что диагональ BD параллельна стороне AE: 1 балл. ● Доказано, что четырёхугольник AFDE является параллелограммом: 3 балла.

9.4. Простые числа p, q, r, s таковы, что $5 < p < q < r < s < p + 10$. Приведите пример таких чисел. Докажите, что их сумма $p + q + r + s$ всегда делится на 60.

Доказательство. Делимость на 60 равносильна одновременной делимости на 3, 4 и 5. Из условия следует, что простые числа p, q, r, s нечётны и могут принимать возможные значения $p, p + 2, p + 4, p + 6, p + 8$. Возможных значений пять, а чисел четыре, то есть не принимается только одно из значений $p + 2, p + 4, p + 6, p + 8$, а сумма $p + q + r + s$ равняется соответственно $4p + 18, 4p + 16, 4p + 14,\ 4p + 12$. Рассмотрим остатки от деления этих чисел на 3, 4 и 5.

Остаток от деления p на 3 может равняться 1 или 2, тогда остатки от деления чисел $p, p + 2, p + 4, p + 6, p + 8$ равны соответственно 1, 0, 2, 1, 0 или 2, 1, 0, 2, 1. В первом случае среди остатков присутствуют два нуля, поэтому хотя бы одно из чисел p, q, r, s делится на 3, что невозможно. Следовательно, остаток от деления p на 3 равняется 2, а среди чисел отсутствует $p + 4$. Тогда сумма их равна $4p + 16$, что при делении на 3 даёт остаток 0, следовательно сумма чисел делится на 3. Отметим: теперь мы знаем, что наши числа равны $p, p + 2, p + 6, p + 8$.

Остаток от деления p на 4 может равняться 1 или 3, тогда остатки от деления чисел $p, p + 2, p + 6, p + 8$ равны соответственно 1, 3, 3, 1 или 3, 1, 1, 3. В обоих случаях сумма остатков равна 8, поэтому сумма $p + q + r + s$ делится на 4.

Остаток от деления p на 5 может равняться любому из чисел 1, 2, 3, 4, в каждом случае остатки чисел $p, p + 2, p + 4, p + 6, p + 8$ принимают все значения от 0 до 4, тогда сумма всех ненулевых остатков из них равна 10, следовательно, сама сумма простых чисел делится на 5. Можно даже уточнить, что, раз среди простых отсутствует $p+4,$ то именно его остаток от деления на 5 равен 0, и тогда остаток от деления самого p равен 1.

Примерами таких четвёрок простых чисел являются $p=11, q=13, r=17, s=19,$ или $p=101, q=103, r=107, s=109$.

Критерии проверки. ● Любой верный пример чисел p, q, r, s: 1 балл. ●Верное рассмотрение остатков по каждому из модулей 3, 4, 5: по 2 балла каждый.

9.5. Клетки квадрата 6 на 6 окрашены в шахматном порядке. За одну операцию цвет каждой клетки в некоторой полоске из 3 клеток, вертикальной или горизонтальной, заменяется на противоположный. Какое минимальное число таких операций требуется, чтобы сделать все клетки доски белыми?

Ответ. 10.

Решение. Оценка. Занумеруем, как в шахматах, горизонтали квадрата от 1 до 6 снизу вверх, а вертикали квадрата латинскими буквами от a до f слева направо. Традиционно считаем клетку a1 чёрной. Рассмотрим 6 чёрных клеток главной диагонали a1, b2, c3, d4, e5, f6 а также чёрные клетки a5, b6, e1, f2. Каждая полоска их трёх клеток содержит не более, чем одну из этих клеток, поэтому, чтобы перекрасить в белый цвет только их, необходимо не менее 10 операций.

Докажем, что 10 операций достаточно. Разделим квадрат на 4 квадрата размера 3 на 3 клетки, в левом нижнем и правом верхнем из них применим по 3 операции перекрашивания: первой и третьей строк и второго столбца. В левом верхнем и правом нижнем квадратах 3 на 3 применим по 2 операции перекрашивания: второй строки и второго столбца. Легко убедиться, что при этом все чёрные клетки изменят свой цвет ровно один раз и станут белыми, а все белые либо дважды изменят цвет, либо вообще не изменят, и останутся белыми. Цель задачи достигнута.

Критерии проверки. ● Доказано только, что необходимо не менее 10 операций: 3 балла. ● Только построен пример, как сделать все клетки доски белыми за 10 операций: 3 балла. ● Сделаны обе части: 7 баллов.