Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников

Новосибирской области по математике 2025-2026 г.г.

Решение каждой задачи олимпиады оценивается из 7 баллов

8 класс

1. На волшебный забег пришли математик, кентавр и совёнок. Кентавр и совёнок стартовали одновременно, а вот математик замешкался и начал своё движение только через минуту после них (скорости постоянны, а бегут все по прямой в одном направлении). Пробежав одну минуту, математик не догнал остальных, но сократил расстояние до кентавра в полтора раза, а до совёнка – в два раза. Как относятся скорости кентавра и совёнка?

Решение. Пусть скорости кентавра и совёнка равна k и s метров в минуту, соответственно. Тогда математик за минуту сократил отставание до кентавра с k метров до 2/3 k. Из этого следует, что за 2 минуты кентавр пробежал $2k$ метров, а математик за одну – 4/3 k метров, то есть его скорость равна 4/3 k. Аналогично, за 2 минуты совёнок пробежал $2s$ метров, а математик за одну – 3/2 s метров, то есть его скорость равна 3/2 s.

Значит, 4/3 k = 3/2 s, откуда k = 9/8 s, то есть кентавр в 9/8 раз быстрее совёнка.

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

Только ответ с проверкой, что он подходит – 1 балл.

Верно вычислено, что математик в 4/3 раза быстрее кентавра или в 3/2 раза быстрее совёнка, но дальнейших продвижений нет – 3 балла.

2. На некотором острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Однажды 10 островитян разного возраста собрались вместе, и каждый из них сказал либо фразу “Среди собравшихся нет рыцарей старше меня”, либо фразу “Среди собравшихся нет лжецов младше меня”. Оказалось, что каждая фраза прозвучала ровно 5 раз. Сколько среди этих 10 человек могло быть рыцарей?

Решение. Рассмотрим людей, сказавших первую фразу. Среди них не более одного рыцаря (в ином случае самый молодой рыцарь соврал бы). Таким образом, всего рыцарей не больше 6. Также среди всех присутствующих есть хотя бы 1 рыцарь (в ином случае все лжецы, говорившие первую фразу, говорили бы правду).

Покажем теперь, что рыцарей могло быть любое количество от 1 до 6. Пусть люди говорят фразы в порядке увеличения возраста. Запишем в ряд номера произнесенных ими фраз:

- 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1: всего 6 рыцарей с номерами 1—5 и 10.
- 2, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1: всего 5 рыцарей с номерами 1—4 и 10.
- 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1: всего 4 рыцаря с номерами 1—3 и 10.
- 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1: всего 3 рыцаря с номерами 1—2 и 10.
- 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1: всего 2 рыцаря с номерами 1 и 10.
- 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1: всего 1 рыцарь с номером 10.

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

Доказательство того, что рыцарей не больше 6 – 2 балла.

Доказательство того, что рыцарей не меньше 1 – 2 балла.

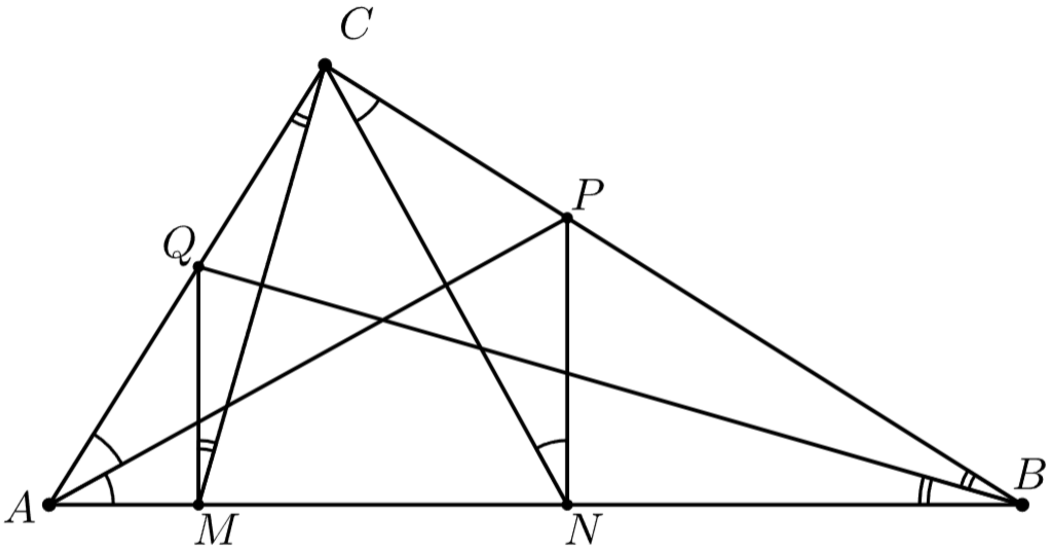
Примеры для всех количеств рыцарей – 3 балла.

Предыдущие три критерия суммируются.

Если в примере отсутствует хотя бы 1 случай – минус 1 балл за пример.

Если отсутствует хотя бы 3 случая – минус 2 балла за пример.

3. В прямоугольном треугольнике ABC проведены биссектрисы острых углов AP и BQ. Из точек P и Q на прямую AB опущены перпендикуляры PN и QM. Чему может быть равен угол MCN?



Решение. Пусть $\angle CAP = \angle PAB = \alpha, \angle CBQ = \angle QBA = \beta$. Тогда из суммы углов треугольника ABC имеем $\alpha + \beta = 45°$.

Заметим, что $PC = PN$, так как прямоугольные треугольники ACP и ANP равны по острому углу и общей гипотенузе. Значит. $\angle PCN = \angle PNC$. Из суммы углов треугольника PNB имеем $\angle NPB = 90° - 2\beta = 2\alpha$. Но этот угол является внешним к треугольнику PCN, откуда $\angle PCN = \angle PNC = \alpha$. Аналогично, $\angle QCM = \angle QMC = \beta$. Следовательно, $\angle MCN = \angle ACB - \alpha - \beta = 45°$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

Доказано, что $PN = PC$ – 1 балл.

Доказано, что $\angle PCN = \angle PNC = \alpha$ – ещё 3 балла.

4. В пекарне продаются пироги ровно 7 разных вкусов, ровно 7 разных размеров и ровно 7 разных стоимостей. Оказалось, что для любых двух значений параметров (например, выбранных вкуса и цены) найдётся пирог с такими свойствами. Верно ли, что обязательно можно найти четыре таких пирога, что у любых двух из них будут отличаться все три параметра?

Решение. Нет, не верно. Приведём пример, когда условие задачи выполнено, но четырёх описанных пирогов найти не выйдет.

Отождествим пироги с тройками чисел *(a, b, c)*, где a, b, c – числа от 1 до 10. Пусть в пекарне продаются пироги вида *(1, b, c)*, *(a, 1, c)*, *(a, b, 1)* для всевозможных значений a, b, c. Это значит, что хотя бы один параметр у пирога всегда равен единице. Несложно видеть, что условие выполнено, но при этом среди любых четырёх пирогов найдутся два, у которых единица стоит на одном и том же месте. Это значит, что не выйдет найти четырёх таких пирогов, чтобы у них отличались все три параметра.

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

Любой верный пример с обоснованием, что он подходит – 7 баллов.

Любой верный пример без обоснования – 5 баллов.

5. В клетках квадрата 5×5 расставлены различные натуральные числа таким образом, что любые два числа, соседние по стороне, имеют общий делитель, отличный от единицы. Пусть n – наибольшее число в этой таблице. Какое наименьшее значение может принимать n?

Решение. Предположим, $n \le 32$. Рассмотрим любое простое число p, стоящее в этой таблице. У него есть хотя бы два соседа, они отличаются от p и делятся на p, откуда равны хотя бы *2p* и *3p*. В частности, $3p \le 32$, откуда $p \le 10$. Это значит, что в таблице не могут встречаться числа 11, 13, 17, 19, 23, 29 и 31. Очевидно, кроме того, что единицы в этой таблице тоже нет. Но тогда получается, что в таблице не больше $32 - 8 = 24$ различных чисел, а их должно быть 25. Противоречие, откуда следует, что $n \ge 33$.

В качестве примера подходит таблица

11	33	3	21	7
22	30	9	12	14
2	4	24	27	6
8	16	20	18	15
26	28	32	10	5

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

Только любой верный пример для $n = 33$ – 3 балла.

За отсутствие обоснования того, что пример подходит, баллы не снимаются.

Только доказательство того, что $n \ge 33$ – 3 балла.

В оценке доказано только, что если в таблице встречается простое число p, то встречается и хотя бы *3p* – 1 балл. Этот балл может складываться с баллами за пример.