Решения заданий Муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников 2025-26 г.г. по математике

Каждое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

11 класс

11.1. Найти все тройки действительных чисел a, b, c такие, что $a + bc = b + {} + ca = c + ab$.

Ответ. Все тройки вида $(a, a, a), (a, 1,1), (1, b, 1), (1,1, c)$. В первой тройке $a -$ любое, в остальных можно добавить условия $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$. Но можно и не добавлять, это не ошибка.

Решение. Из первого равенства получаем $a + bc = b + ca \Leftrightarrow a - b = c(a - b)$, откуда, либо $a = b$, либо $c = 1$. Аналогично, из равенства $b + ca = c + ab \Leftrightarrow b - c = a(b - c)$ получаем, либо $b = c$, либо $a = 1$. Наконец, из равенства $a + bc = c + ab \Leftrightarrow a - c = b(a - c)$ получаем, либо $a = c$, либо $b = 1$.

Если все числа a, b, c различны, то из предыдущего следует $a = b = c = 1$ – противоречие.

Если среди чисел два совпадают, скажем, $a = b$, а c отлично от них, то из предыдущего следует $a = b = 1$, c – любое. Аналогично добавляются тройки $a = c = 1$, b – любое, и $b = c = 1$, a – любое.

Если все числа a, b, c совпадают, они, очевидно, удовлетворяют условию.

Критерии проверки. ● Найдены все условия из первого абзаца данного решения: 3 балла. ● Просто приведены все верные ответы с проверкой: 2 балла.

11.2. Докажите, что для любой пары натуральных чисел x, y найдётся натуральное число h такое, что $x + h$ делится на y, а $y + h$ делится на x.

Доказательство. Попробуем найти такое h. Для него должны выполняться равенства: $x + h = ky, y + h = lx$ для некоторых натуральных чисел k, l. Вычитаем первое из второго, получаем $y - x = lx - ky$, откуда $(l + 1)x = (k + 1)y$. Данное равенство выполнено, например, для $l = y - 1, k = x - 1$. Тогда $h = ky - x = xy - x - y$. Проверяем: $x + h = xy - y = y(x - 1)$ – делится на y, а $y + h = xy - x = x(y - 1)$ делится на x, поэтому данное h подходит.

Замечание. Данное h может быть просто угадано явно и проверено, это тоже считаем полным решением. Кроме того, возможны и другие значения h.

Критерии проверки. ● Получено уравнение $(l + 1)x = (k + 1)y$: 3 балла.

11.3. Хордой графика функции называется любой отрезок, концы которого - две различные точки на этом графике. Найдите множество середин всевозможных хорд графика функции $y = x^3$.

Ответ. Множество точек выше графика функции $y = x^3$ при положительных x, множество точек ниже графика функции $y = x^3$ при отрицательных x, и точка (0,0).

Решение. Пусть точка $M(a, b)$ является серединой некоторой хорды графика функции $y = x^3$. Тогда, если координаты одной вершины хорды равны (x, x^3), то координаты второй вершины равны $(2a - x, 2b - x^3)$ и она тоже лежит на графике функции. Тогда $2b - x^3 = (2a - x)^3$ $(*)$, откуда $3ax^2 - 6a^2x + 4a^3 - b = 0$ $(**)$. Полученное уравнение должно иметь два различных решения, поэтому его дискриминант положителен: $D = 36a^4 - 48a^4 + 12ab > 0$, откуда $ab > a^4$. При $a > 0$ получаем $b > a^3$, при $a < 0$ получаем $b < a^3$. Если же $a = 0$, то сразу из уравнения $(**)$ получаем $b = 0$. Полученные неравенства являются необходимыми для координат (a, b) середины хорды. Они же будут и достаточными: если они выполнены, то дискриминант уравнения $(**)$ положителен и оно имеет два различных решения, поэтому имеет два решения и эквивалентное ему уравнение (*), и тогда, если x - его решение, то точки $A(x, x^3)$ и $B(2a - x, 2b - x^3)$ лежат на графике функции $y = x^3$ и середина отрезка AB имеет как раз координаты (a, b). Здесь два решения – это как раз x и $2a - x$.

Критерии проверки. ● Если найдены верные неравенства для координат (a, b) середины хорды как необходимые, но не доказано, что они являются достаточными: 5 баллов. ● Неверно рассмотрен случай $a = 0$: минус 2 балла. ● Точки на графике функции, кроме (0,0), включены в ответ: снимаем 2 балла.

11.4. Во вписанном четырёхугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке E. На отрезке CE выбрана точка F такая, что AF=BE, а на отрезке BE – точка G такая, что DG=CE. Докажите, что четырёхугольник BGFC – вписанный.

Доказательство. 1. Сначала докажем, что прямая FG параллельна прямой AD. Для этого докажем подобие треугольников AED и FEG, а точнее, что $\frac{AE}{EF} = \frac{DE}{EG}$. Обозначим для краткости длины отрезков: $AE = a, BE = b, CE = c, DE = d$. Тогда $\frac{AE}{EF} = \frac{DE}{EG} \Leftrightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{d}{c-d} \Leftrightarrow ac - ad = bd - ad \Leftrightarrow ac = bd \Leftrightarrow AE \cdot EC = BE \cdot ED$. Последнее выполнено, потому что четырёхугольник ABCD – вписанный, поэтому произведения длин отрезков, на которые точка E делит хорды AC и BD, равны.

2. Теперь докажем, что четырёхугольник BGFC – вписанный, для этого докажем, что сумма величин углов GBC и CFG равна 180°. Действительно, из

параллельности прямых FG и AD следует равенство накрест лежащих углов GFA и DAC. Углы DAC и DBC равны, как вписанные, опирающиеся на общую дугу CD. Тогда $\angle CFG = 180°$-$\angle GFA = 180°$-$\angle DAC = 180°$-$\angle DBC = 180°$-$\angle GBC$, откуда следует $180° = \angle GBC + \angle CFG$, что и даёт вписанность четырёхугольника BGFC.

Критерии проверки. (●) Доказана параллельность прямых FG и AD: 4 балла. (●) Используя это доказано, что четырёхугольник BGFC – вписанный: 3 балла.

11.5. Триангуляцией *N*-угольника, не обязательно выпуклого, называется его разбиение на *N-2* треугольника некоторыми *N-3* диагоналями, лежащими полностью внутри него. Диагонали могут пересекаться только в вершинах *N*-угольника. Триангуляции совпадают, если полностью совпадают множества их разбивающих диагоналей, в противном случае они считаются различными. Так, выпуклый 4-угольник имеет две различных триангуляции, невыпуклый 4-угольник – одну, выпуклый 5-угольник – пять. 1) Постройте пример 100-угольника, который можно триангулировать ровно одним способом. 2) Для каждого натурального k построить пример многоугольника, который можно триангулировать ровно k различными способами. Этот многоугольник может быть невыпуклым, а число его вершин зависит от k.

Решение. 1) Рассмотрим окружность **Ω**, на ней дугу величиной в 98 градусов, на дуге отметим 99 точек, включая концы дуги, делящих её на 98 равных дуг по 1 градусу каждая, соединим эти точки последовательно 98 отрезками. Проведём в концах этой дуги касательные к **Ω**, добавим к полученной ломаной точку А пересечения этих касательных. Полученный невыпуклый 100-угольник 100 с вершинами А и 99 отмеченными ранее точками – искомый. У всех диагоналей, лежащих внутри этого 100-угольника, один конец обязательно совпадает с вершиной А, поэтому возможна единственная его триангуляция, образованная 97 диагоналями, проведёнными из А.

2) Для достижения цели несколько изменим предыдущую конструкцию. Теперь на дуге будут отмечены k точек, включая её концы, а вершину А мы срежем, заменив её на две вершины Б и В, соединённых отрезком, при этом Б соединена отрезком с точкой 1, а В – с точкой k. Полученный невыпуклый k+2 - угольник – искомый. Диагонали, лежащие внутри него, делятся на два типа: первый - одним концом заканчиваются в Б, а другим – в одной из точек 2, 3…., k, второй - одним концом заканчиваются в В, а другим – в одной из точек 1,2…., $k-1$. Отрезаемый треугольник АБВ маленький настолько, чтобы все указанные диагонали можно было провести. Рассмотрим произвольную триангуляцию, и в ней треугольник, одна из сторон которого совпадает со стороной БВ, тогда его третья вершина совпадает

с одной из вершин 1,2….,k, обозначим её за m. Любая триангуляция многоугольника выглядит так: несколько (возможно, 0) диагоналей первого типа выходят из Б в вершины 2,3,..,m, а остальные выходят из вершины В в вершины m,…,k-1. В двух крайних случаях все диагонали либо при $m = k$ идут из Б в вершины 2, 3, …., k, либо при $m = 1$ идут из вершины В в вершины 1, 2, …. , $k - 1$. Таких триангуляций ровно k, поэтому искомый k+2 - угольник ровно с k различными триангуляциями построен.

(●) Пример в пункте 1): 2 балла, (●) Обоснование примера в пункте 1): 1 балл.
(●) Пример в пункте 2): 2 балла. (●) Обоснование примера в пункте 2): 2 балла.