Решения заданий Муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников 2025-26 г.г. по математике

Каждое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

10 класс

10.1. Найти все целые числа x, при которых многочлен $2x^2 - x - 36$ принимает значения, равные квадратам простых чисел.

Ответ. x=5 и x=13.

Решение. Найдём корни многочлена из условия: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{4} = -4, \frac{9}{2}$, поэтому $2x^2 - x - 36 = (x+4)(2x-9)$. Это число равно квадрату p^2 простого числа p в одном из случаев: одна из скобок произведения равна 1 или -1 (а вторая, соответственно, p^2 или $-p^2$), либо обе скобки равны одновременно p или $-p$.

Первый вариант даёт нам возможные значения x=-3,-5,5,4, второй x=13. Соответственно, значения многочлена при этих x равны -15, 19, 9, -8, 289. Квадратами являются 9 и 289$= 17^2$, поэтому ответами являются x=5 и x=13.

Критерии проверки. ● Многочлен разложен на множители: 1 балл. ● Верно названы все возможности значений скобок в разложении: 4 балла. Если не все: 1 балл. ● Потерян один из ответов: минус 3 балла.

10.2. Пусть O - центр описанной окружности треугольника ABC, величина угла CBA равна 60°, а величина угла CBO равна 45°. Обозначим за P точку пересечения прямых BO и AC. Докажите, что длины отрезков AP и PO равны.

Доказательство. Величина угла ABO равна разности углов CBA и CBO, то есть 60°-45°=15°. В треугольнике AOB стороны AO и OB являются радиусами описанной окружности, поэтому он равнобедренный, значит величина угла BAO тоже равна 15°, а величина внешнего угла AOP равна 15°+15°=30°.

Рассмотрим теперь равнобедренный треугольник AOC, его угол AOC при вершине O является центральным, соответствующим вписанному углу ABC, поэтому величина AOC вдвое больше величины ABC и равна 120°. Соответственно, величины его углов при основании OAC и OCA равны по 30°. Следовательно, треугольник APO является равнобедренным с равными углами AOP и OAP=OAC=30°. Отсюда следует требуемое в условии равенство длин отрезков AP и PO.

Критерии проверки. ● Найден угол ABO: 1 балл. ● Найден угол AOP: 2 балла. ● Найден угол AOC: 2 балла. ● Найден угол OAP: 1 балл. ● Указана равнобедренность треугольника APO: 1 балл.

10.3. Решить в действительных числах систему уравнений: $ab + c + d = 3, bc + d + a = 5, cd + a + b = 2, da + b + c = 6$.

Ответ. $a = 2, b = 0, c = 0, d = 3$.

Решение. Вычтем первое уравнение системы из второго, получим: $bc + d + a - ab - c - d = (b - 1)(c - a) = 2$. Аналогично, вычитая второе уравнение из третьего, получим: $cd + a + b - (bc + d + a) = (c - 1)(d - b) = -3$. Вычитая третье уравнение из четвёртого, получим: $da + b + c - (cd + a + b) = (d - 1)(a - c) = 4$. Вычитая четвёртое уравнение из первого, получим: $ab + c + d - (da + b + c) = (a - 1)(b - d) = -3$. Из второго и четвёртого равенств следует $c - 1 = -(a - 1)$, откуда $c = 2 - a$. Из первого и третьего равенств следует, что $d - 1 = -2(b - 1)$, откуда $d = 3 - 2b$. Подставим эти выражения в первое уравнение, получим: $ab + 2 - a + 3 - 2b = 3 \Leftrightarrow (a - 2)(b - 1) = 0$, откуда $a = 2$ или $b = 1$. Подставим те же выражения во второе уравнение, получим: $b(2 - a) + 3 - 2b + a = 5 \Leftrightarrow ab - a + 2 = 0$. Из последнего равенства следует $b \neq 1$, поэтому $a = 2, c = 0, b = 0, d = 3$. Проверка подтверждает, что это действительно решение системы.

Критерии проверки. ● Только угадан ответ с проверкой: 1 балл. ● Сделано одно вычитание уравнений и получено уравнение типа $(b - 1)(c - a) = 2$: 1 балл.

10.4. Найти все натуральные $n > 1$, для которых все числа от 1 до n можно записать в некотором порядке в ряд $x_1, x_2, \dots, x_n$ так, что сумма $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ делится на k для всех $k = 1,2, \dots, n$.

Ответ. $n = 3$.

Решение. Пример требуемого расположения чисел при $n = 3$ таков: 1, 3, 2. Докажем, что при остальных $n > 1$ требуемое в условии невозможно.

1. Так как $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ – делится на n, то $\frac{n+1}{2}$ – целое и n должно быть нечётным, $n = 2m + 1$.

2. Рассмотрим при $k = n - 1$ сумму $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - x_n$=(m+1)(2m+1)-$x_n$, она должна делиться на $n - 1 = 2m$. Остаток от деления этой суммы на $2m$ равен $m + 1 - x_n$, причём $1 \leq x_n \leq 2m + 1$, поэтому $m + 1 - x_n$ лежит в пределах от $-m$ до m. В этом интервале только 0 делится на $2m$, поэтому $x_n = m + 1 = \frac{n+1}{2}$, а сумма $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)}{2} = 2m(m + 1)$.

3. Рассмотрим при $k = n - 2$ сумму $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$-$x_{n-1} = 2m(m+1) - x_{n-1}$, она должна делиться на $n - 2 = 2m - 1$. Остаток от деления этой суммы на $2m - 1$ равен $m + 1 - x_{n-1}$, причём $1 \leq x_{n-1} \leq 2m + 1$, поэтому снова, как в пункте 2, $x_{n-1} = m + 1 = \frac{n+1}{2} = x_n$, чего не может быть. Исключительным здесь случаем является $m = 1$, потому, что тогда $2 = m + 1 > 2m - 1 = 1$ и $m + 1$ не является остатком от деления $2m(m+1)$ на $2m - 1$.

Критерии проверки. ● Доказано, что n должно быть нечётным: 1 балл. ● Доказано, что $x_n = m + 1 = \frac{n+1}{2}$: 2 балла. ● Доказано, что $x_{n-1} = m + 1 = \frac{n+1}{2}$: 3 балла. ● Пример для $n = 3$: 1 балл.

10.5. В группе из 16 школьников каждый дружит ровно с тремя другими, при этом дружба взаимна. Всегда ли можно так рассадить школьников за парты по двое, чтобы за каждой партой сидели двое друзей?

Ответ. Нет, не всегда.

Решение. Приведём пример, когда школьников указанным в условии способом рассадить нельзя. Занумеруем их числами от 1 до 16, и условно разобьём на три пятёрки от 1 до 5, от 6 до 10, от 11 до 15, и школьника номер 16. Внутри первой пятёрки дружат 1 с 2 и 5, 2 с 1 и 3, 3 с 2 и 4, 4 с 3 и 5, 5 с 1 и 4, 2 с 4, 1 с 3. Аналогично, во второй пятёрке дружат школьники с номерами, на 5 большими, чем в первой, а в третьей - дружат школьники с номерами, на 10 большими, чем в первой. Школьник 16 дружит с 5, 10 и 15. Если бы можно было разбить всех на пары друзей, то школьник 16 оказался бы в паре с одним из 5, 10, 15, можно считать, что это 15. Тогда в первых двух пятёрках у всех школьников возможные напарники могут быть только в их же пятёрках, и эти пятёрки можно было бы разбить на пары друзей, что невозможно, ввиду нечётности числа 5.

Замечание. Данный пример – единственный, известный составителям.

Критерии проверки. ● Построен верный пример: 5 баллов. ● Обосновано, что он подходит: 2 балла.