

Ключи к заданиям 11 класса

1. Условие. Каков бы был период обращения Плутона относительно Солнца, если бы масса Солнца была в 10 раз больше, чем на самом деле? Считать, что большая полуось орбиты Плутона не изменяется и равна 39.5 а.е.

1. Решение. Из обобщённого третьего закона Кеплера:

$$MT^2 / a^3 = \text{const}, \text{ (4 балла)}$$

где M — масса притягивающего тела («нового» Солнца), T — период обращения, a — большая полуось орбиты.

Константа в правой части определяется универсальными физическими постоянными, её можно рассчитать непосредственно, подставив текущие значения параметров орбиты Земли, либо понять, что в системе единиц, где массу мы измеряем в массах Солнца, радиус орбиты — в а.е., а период — в земных годах, она просто равна единице.

Тогда, подставляя новое значение массы Солнца (10) и оставляя старое значение большой полуоси (39.5), получаем:

$$T = (1 \cdot 39.5^3 / 10)^{1/2} = 78,5 \text{ земных лет. (4 балла)}$$

Альтернативное решение: В нашей задаче масса Солнца возрастает в 10 раз, большая полуось орбиты остаётся прежней, значит, орбитальный период уменьшается в $10^{1/2} \approx 3,1$ раза (4 балла). Текущее значение орбитального периода можно рассчитать через «упрощённый» закон Кеплера для Солнечной системы: $T^2 = a^3$, $T \approx 250$ лет (2 балла)

Тогда получаем текущее значение периода около 250 лет, а новое = $250 / 3.1 = 78,5$ лет (2 балла).

1. Критерии оценивания.

1 этап (4 балла): формулировка третьего закона Кеплера в обобщённой форме (с учётом массы притягивающего тела). Закон может, как выводиться из расчётов движения тела по круговой орбите, так и формулироваться «сразу» в виде, приведённом выше, либо в другой альтернативной форме, например, в виде отношения периодов и других параметров двух орбит. При любой верной формулировке, учитывающей массу притягивающего центра, этап оценивается в полной мере.

При формулировке закона в виде, исключаящем массу, и выводе, что период обращения Плутона не изменится, максимальная оценка за задачу не может составлять больше 2 баллов.

При перепутанных степенях при периоде и большой полуоси в законе текущий этап оценивается в 0 баллов, следующие этапы при верных вычислениях оцениваются в полной мере.

При верной формулировке закона, но использовании радиуса орбиты (R) вместо большой полуоси (a) оценка за этап снижается на 1 балл, дальнейшие этапы оцениваются в полной мере.

2 этап (2 балла): вычисление текущего периода обращения Плутона. При взятии величины как известной этап не засчитывается, остальное решение оценивается в полном объёме, максимальная оценка за задачу — 6 баллов.

3 этап (2 балла): определение нового периода обращения Плутона. При арифметических ошибках, приводящих к погрешностям более 10% (ответ менее 70 лет или более 90 лет) этап не засчитывается.

Второй и третий этапы могут выполняться совместно без явного выделения ответа на второй этап. В этом случае при верных вычислениях и корректном ответе этапы оцениваются в полной мере (итого 4 балла).

При выполнении первого и второго этапа в обратном порядке задача оценивается в полной мере.

При заведомо физически неразумном ответе (например, период менее 1 года или период превышает исходный период Плутона) максимальная оценка за задачу в целом не может превышать 2 балла.

2. Условие. Из вещества двенадцати звёзд спектрального класса F5 инопланетяне сделали одну голубую звезду класса O9. Средняя плотность получившейся звезды оказалась в 5 раз меньше, чем у исходных звёзд. Во сколько раз светимость получившейся звезды превышает светимость каждой из звёзд-источников?

2. Решение. По закону Стефана-Больцмана светимость определяется температурой и площадью поверхности звезды:

$$L = \sigma T^4 \cdot S = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2. \text{ (2 балла)}$$

Масса получившейся звезды равна 12 массам исходной звезды, а плотность в 5 раз меньше. Значит, объём итоговой звезды в $12 \cdot 5 = 60$ раз больше объёма каждой звезды-источника.

Это означает, что радиус звезды превышает радиус звезды-источника в $60^{1/3} = 3,9$ раз, а площадь поверхности — в $60^{2/3} = 15,3$ раза. **(1 балл)**

Температура звезды класса F составляет от 6000 до 7500 К, класс F5 находится где-то в середине этого диапазона, значит, можно взять значение температуры около 6800 К (**2 балла**). Поздние подклассы класса O имеют температуру около 30000 К (**1 балл**).

Значит, температура поверхности итоговой звезды в $30000 / 6800 = 4,4$ раза больше, чем температура исходных звёзд.

Собираем светимость: $L / L_0 = (T / T_0)^4 \cdot S / S_0 = 4,4^4 \cdot 15,3 \approx 5700$ (**2 балла**)

Итого: светимость получившейся звезды в 5700 раз превышает светимость каждой из звёзд-источников.

2. Критерии оценивания.

1 этап (2 балла): запись формулы светимости либо напрямую в виде закона Стефана-Больцмана, либо сразу в виде соотношения между светимостями итоговой и исходной звёзд. При ошибке в показателях степеней при радиусе или температуре этап не засчитывается, максимальная оценка за задачу не может превышать 2 балла.

При погрешностях в записи (например, при пропуске множителя 4π или σ), которые не влияют на итоговый результат, этап не засчитывается, но последующие этапы при верных вычислениях оцениваются в полной мере.

2 этап (1 балл): вычисление соотношения радиусов или площадей итоговой и исходных звёзд. При погрешностях менее 10% этап оценивается полностью. При больших погрешностях оценка за этап 0 баллов, остальные этапы оцениваются в полной мере.

3 этап (2 балла): оценка температуры исходных звёзд. Величина температуры в диапазоне от 6500 до 7000 К оценивается в полной мере, при величине от 6000 до 6500 К или от 7000 до 7500 К оценка снижается на 1 балл, при других величинах оценка за этап — 0 баллов, остальные этапы при верных вычислениях оцениваются в полной мере.

4 этап (1 балл): оценка температуры итоговой звезды. Величина от 25000 до 35000 оценивается в полной мере, при других величинах оценка за этап — 0 баллов, остальные этапы при верных вычислениях оцениваются в полной мере.

5 этап (2 балла): получение итогового ответа в виде соотношения светимостей. Правильным ответом считается ответ, получаемый при подстановке в верные формулы выбранных участником значений температур звёзд F5 и звезды O9. Допустимая погрешность для полной оценки этапа — 10%, при погрешности до 30% за этап ставится 1 балл, при больших погрешностях или физически неразумном ответе — 0 баллов.

3. Условие. Представим, что вместо Солнца в центре Солнечной системы поместили Сириус. С какой звёздной величиной он будет виден на небе Земли? Рассчитайте «сириусную постоянную» – количество энергии, которое падает на 1 м^2 поверхности на расстоянии 1 а.е. от Сириуса. Возможно ли образование жизни на Земле при таких условиях? Параметры Сириуса: видимая звездная величина: $-1,46^m$, масса: 2 массы Солнца, радиус: 1,7 радиусов Солнца, температура поверхности: 9940 К, расстояние от Сириуса до Земли: 8,6 св. лет.

3. Решение. Зная видимую звёздную величину Сириуса на расстоянии 8,6 св. лет, определим по закону Погсона и закону обратных квадратов его видимую звёздную величину на расстоянии 1 а.е.:

$$\Delta m = 5 \lg (D_1 / D_2) = 5 \lg (8,6 \cdot 63241) = 28,67^m$$

$$m = -1,46^m - 28,67^m \approx -30,2^m \text{ (3 балла)}$$

Зная из справочных данных видимую звёздную величину Солнца, также по закону Погсона определим светимость Сириуса в единицах светимости Солнца:

$$L_1 / L_2 = 2,512^{-26,8 - (-30,2)} = 23 \text{ (2 балла)}$$

Сириус в 23 раза ярче Солнца по светимости, значит, и световой поток на расстоянии 1 а.е. будет в 23 раза больше, чем поток от Солнца на Землю. Зная из справочных данных земную солнечную постоянную (1360 Вт/м^2), определим «сириусную постоянную»:

$$W = 1360 \cdot 23 \approx 34,2 \text{ кВт / м}^2. \text{ (2 балла)}$$

Разумеется, при таком потоке энергии температуры на Земле будут абсолютно непригодны для биологической жизни. **(1 балл)**

Альтернативное рассуждение: световой поток от Сириуса на расстоянии 1 а.е. можно рассчитать более трудоёмким способом – напрямую через формулу Стефана-Больцмана и закон обратных квадратов, зная температуру и радиус звезды. При верных вычислениях ответ получается таким же.

3. Критерии оценивания.

Участник может пройти этапы 1 и 2 двумя разными способами (1а-2а и 1б-2б), которые при верном их выполнении оцениваются одинаково.

Этап 1а (3 балла). Вычисление видимой звёздной величины Сириуса на расстоянии 1 а.е. по закону Погсона и закону обратных квадратов. Расчётная формула может записываться полностью через выражение освещённости для различных расстояний до объекта или в кратком виде, аналогичном приведённому выше. При «попадании» в правильный ответ с точностью $\pm 0,2^m$ этап оценивается полностью, при большей погрешности за арифметические

ошибки снимается 1 балл. При получении правильного ответа с последующим его округлением, при котором отбрасывается более $0,1^m$, оценка снижается на 1 балл.

Этап 2а (2 балла). Вычисление светимости Сириуса сравнением полученной звёздной величины со звёздной величиной Солнца из справочных данных по закону Погсона. Ответ может быть выражен как в светимостях Солнца ($23 L_C$), так и в абсолютных величинах ($9 \cdot 10^{27}$ Вт). Допустимая точность ответа – $\pm 2 L_C$ или $\pm 1 \cdot 10^{27}$ Вт. При большей погрешности, но верных формулах расчёта за этап ставится 1 балл, последующие этапы оцениваются в полном объёме.

Этап 1б (3 балла). Вычисление светимости Сириуса напрямую из закона Стефана-Больцмана по известной из условия температуре поверхности и радиусу. Для получения полного балла за этап ответ должен попасть в «ворота» $(9 \pm 1) \cdot 10^{27}$ Вт, за большую погрешность при верных формулах расчёта ставится оценка 2 балла, , последующие этапы оцениваются в полном объёме.

Этап 2б (2 балла). Вычисление видимой звёздной величины Сириуса на расстоянии 1 а.е. через сравнение его светимости с известной светимостью Солнца и закон Погсона. При «попадании» в правильный ответ с точностью $\pm 0,2^m$ этап оценивается полностью, при большей погрешности за арифметические ошибки снимается 1 балл. При получении правильного ответа с последующим его округлением, при котором отбрасывается более $0,1^m$, оценка снижается на 1 балл.

Этап 3 (2 балла). Вычисление потока энергии на Землю по закону обратных квадратов или по известному соотношению светимостей Сириуса и Солнца. Допустимая погрешность — 10% (ответ от 31 до 37 кВт / м²).

Этап 4 (1 балл). Вывод о невозможности существования биологической жизни на Земле в заданных условиях. Балл за этап ставится при наличии чётко сформулированного негативного ответа на вопрос, даже если предыдущие этапы были выполнены неверно, но итоговое значение потока энергии получилось порядка десятков кВт/м² или выше. За верный ответ без численного обоснования баллы не ставятся.

4. Условие. Школьник Петя, живущий на Луне, пишет на лунной поверхности послание для школьницы Маши, живущей на Земле. Петя знает, что у Маши есть хороший равнозрачковый телескоп с диаметром объектива 200 мм. Какого минимального размера должны быть буквы послания, чтобы Маша смогла их прочитать в такой телескоп? Влиянием атмосферы Земли пренебречь, считать, что блеск Луны не мешает наблюдать сигналы от Пети. Разрешающая способность человеческого глаза – около 1'.

4. Решение. Минимальный размер букв при пренебрежении эффектами атмосферы определяется двумя параметрами: разрешающей способностью человеческого глаза (с учётом увеличения телескопа) и дифракционным пределом. Рассмотрим эти эффекты по порядку.

Увеличение телескопа определяется отношением фокусных расстояний объектива и окуляра. Это соотношение в отсутствие дифрагмирования совпадает с отношением диаметров объектива (входного отверстия) и окуляра. Подставляя значение $D = 200$ мм (из условия) и $d = 6$ мм (диаметр человеческого зрачка в темноте), получаем коэффициент увеличения телескопа

$$\Gamma = 200 / 6 = 33 \text{ крат (2 балла)}$$

Нам нужно, чтобы после увеличения угловой размер букв хотя бы в 5 раз превысил предел разрешения (иначе мы вместо буквы увидим точку и не прочитаем послание). Значит, изначальный угловой размер букв должен быть не меньше

$$\alpha = 5' / 33 = 0,15' = 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ рад. (3 балла)}$$

При расстоянии до Луны в 384000 км получаем линейный размер букв

$$L = 384000 \cdot 4,4 \cdot 10^{-5} \approx 17 \text{ км (1 балл)}. \text{ Школьник Петя занят надолго.}$$

Проверим, не внесёт ли дополнительное ограничение дифракционный предел. При диаметре входного отверстия 200 мм и длине волны видимого света 550 нм дифракционный предел составит

$$\alpha_d = 1,22 \lambda / D = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ рад,}$$

что примерно в 12 раз меньше наших букв. В данном случае дифракционный предел не влияет на ответ **(2 балла)**, но проверка всё равно была нужна.

4. Критерии оценивания.

Этап 1 (2 балла). Определение коэффициента увеличения телескопа. При этом в качестве диаметра человеческого зрачка участники имеют право брать величины от 5 мм до 8 мм, при этом оценка за этап не снижается. При значениях от 3 мм до 10 мм оценка снижается на 1 балл, при этом последующие этапы оцениваются в полном объёме. При больших отклонениях этап не засчитывается.

Этап 2 (3 балла). Определение требуемого углового размера букв. При рассмотрении буквы как одной точки и ответе порядка $0,03' = 10^{-5}$ рад этап не засчитывается, при этом последующие этапы оцениваются в полном объёме (максимальная оценка за задачу — 5 баллов).

При учёте отношения размера буквы к разрешающей способности глаза от 3 до 7 оценка за этап не снижается, при учёте больших коэффициентов — снижается на 1 балл.

Этап 3 (1 балл). Расчёт требуемого линейного размера букв. Допустимая погрешность – $\pm 10\%$, при этом правильным ответом считается ответ, полученный при верной подстановке в корректные формулы выбранных участником параметров (диаметр зрачка, коэффициент в размере буквы).

Этап 4 (2 балла). Проверка дифракционного предела. При отсутствии упоминания о дифракционном пределе или необоснованном утверждении о его малости этап не засчитывается, максимальная оценка за задачу — 6 баллов.

5. Условие. Вещество фотосферы некоторой звезды на 75% по массе состоит из водорода и на 25% — из гелия, причем водород полностью ионизован, а гелий полностью неионизован. Чему равна средняя молярная масса такого вещества?

5. Решение. Молярная масса — это отношение массы некоторого количества вещества к его количеству в молях (**2 балла**). Возьмём некоторую массу m_0 вещества фотосферы. Тогда масса гелия в этом «кусочке» составляет $0,25 m_0$, а масса водорода — $0,75 m_0$.

Общее количество частиц в этом «кусочке» определяется количеством атомов гелия, количеством атомов водорода и количеством свободных электронов (водород ионизован): $N = N_{\text{He}} + N_{\text{H}} + N_{\text{e}}$ (**2 балла**). Электроны дают вклад в количество частиц, но из-за малой массы электрона по сравнению с массой протона и нейтрона их массовым вкладом можно пренебречь. Посчитаем каждый компонент этой суммы и общее количество частиц в этом объёме вещества.

$$\text{Гелий: } N_{\text{He}} = N_{\text{A}} \cdot m_{\text{He}} / \mu_{\text{He}} = N_{\text{A}} \cdot 0,25 m_0 / \mu_{\text{He}} \text{ (1 балл)}$$

$$\text{Водород: } N_{\text{H}} = N_{\text{A}} \cdot m_{\text{H}} / \mu_{\text{H}} = N_{\text{A}} \cdot 0,75 m_0 / \mu_{\text{H}} \text{ (1 балл)}$$

Электроны: $N_{\text{e}} = N_{\text{H}}$ — поскольку общий заряд атома водорода должен быть нулевым, количество электронов совпадает с количеством ядер водорода. (**1 балл**)

Суммируем: $N = N_{\text{A}} (0,25 m_0 / \mu_{\text{He}} + 0,75 m_0 / \mu_{\text{H}} + 0,75 m_0 / \mu_{\text{H}}) = N_{\text{A}} \cdot m_0 \cdot (0,25/\mu_{\text{He}} + 1,5/\mu_{\text{H}})$.

Средняя молярная масса равна

$$\mu = N_{\text{A}} \cdot m_0 / N = 1 / (0,25 / \mu_{\text{He}} + 1,5 / \mu_{\text{H}})$$

Подставляя значения $\mu_{\text{He}} = 4$ г/моль, $\mu_{\text{H}} = 1$ г/моль (атомарный водород), получаем $\mu = 0,64$ г/моль (**1 балл**). Значение, меньшее, чем молярная масса водорода, не должно смущать, так как в «смесь» входит большое количество электронов с практически нулевой массой.

5. Критерии оценивания.

Этап 1 (2 балла). Определение состава фотосферы — формулировка (в виде текста или формулы), что составляющими частями смеси являются атомы гелия, водорода и электроны. При неучёте электронной компоненты смеси этап не оценивается, этапы 2 и 3 оцениваются в полном объёме, максимальный балл за задачу — 4 балла.

Этап 2 (2 балла). Формулировка определения средней молярной массы как отношения массы к количеству частиц или к количеству вещества (в молях). Формулировка может приводиться в виде текста или в виде формулы, в том числе использованной неявно.

При использовании формулы $\mu = 0,25 \mu_{\text{He}} + 0,75 \mu_{\text{H}}$ или аналогичной, приводящей к ответу $\mu = 1,75$ г/моль, максимальная оценка за задачу — 2 балла.

Этап 3 (1 балл). Утверждение, что количество электронов равно количеству протонов в силу нейтральности общего заряда. Если утверждение явно не записано ни в виде текста, ни в виде формулы, этап не засчитывается, даже если неявная подстановка приводит к верному ответу (в этом случае считаем утверждение недоказанным).

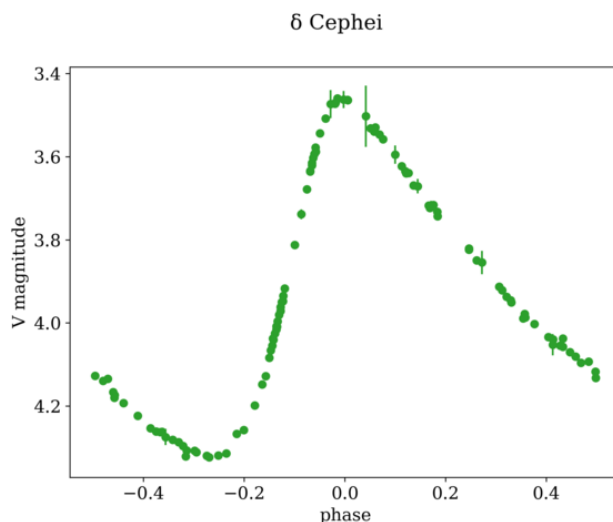
Этап 4 (2 балла). Определение количества вещества каждой компоненты смеси (в штуках атомов или в молях). При подстановке молярной массы водорода 2 г/моль (молекулярный водород) вместо 1 г/моль (атомарный водород) оценка снижается на 1 балл.

Этап 5 (1 балл). Вычисление итогового ответа. Погрешность более 10% зануляет оценку за этот этап. При неучёте электронной компоненты смеси и ответе около 1,23 г/моль этап не оценивается, максимальный балл за задачу — 4 балла.

Корректное выполнение этапов в ином порядке не приводит к снижению баллов.

6. Условие. На графике представлена кривая блеска переменной звезды δ Цефея — зависимость видимой звёздной величины звезды от времени (в долях от периода колебаний). Звезда относится к так называемым цефеидам, колебания светимости которых обусловлены периодическим сжатием и расширением звезды. По спектральным наблюдениям температура поверхности звезды в максимуме блеска составляет около 6800 К, а в минимуме — около 5500 К. Определите отношение светимостей и радиусов звезды в максимуме и минимуме блеска. В какой фазе — в максимуме или в минимуме блеска — радиус звезды

больше?



6. Решение. По графику мы можем определить видимую звёздную величину цефеиды в максимуме и в минимуме блеска. Допустимая точность измерений — $\pm 0,05^m$.

Получаем: $m_{\max} = 3,5^m$, $m_{\min} = 4,3^m$. **(3 балла)**

Под закону Погсона отношение максимальной и минимальной светимостей определяется разницей звёздных величин:

$$L_{\max} / L_{\min} = 2,512^{4,3-3,5} = 2,1 \text{ (2 балла)}$$

По закону Стефана-Больцмана отношение светимостей связано с отношением температур и отношением радиусов:

$$L_{\max} / L_{\min} = (T_{\max} / T_{\min})^4 \cdot (R_{\max} / R_{\min})^2$$

Отсюда $(R_{\max} / R_{\min})^2 = 2,1 / (6800/5500)^4 = 0,9$, и соотношение радиусов $R_{\max} / R_{\min} = 0,95$ **(3 балла)**.

Радиус звезды при максимуме светимости меньше, чем при минимуме. **(1 балл)**

6. Критерии оценивания.

Этап 1 (3 балла). Определение по графику максимальной и минимальной светимостей звезды. Допустимая точность измерений — $\pm 0,05^m$. При непопадании в пределы погрешностей в одном случае оценка снижается на 1 балл, в обоих случаях — на 2 балла. При получившихся значениях вне пределов $3,4^m-3,6^m$ и $4,2^m-4,4^m$ максимальная оценка за задачу — 2 балла.

Этап 2 (2 балла). Расчёт отношения светимостей по закону Погсона. Допустимая погрешность — $\pm 0,2$. Арифметические ошибки, не приводящие к физически абсурдному результату, приводят к снижению оценки за этап на 1 балл.

Этап 3 (2 балла). Определение отношения радиусов через закон Стефана-Больцмана. Формула может быть записана как напрямую через формулы для освещённости, так и сразу в сокращённом виде, приведённом выше. Допустимые результаты без снижения баллов — от 0,85 до 0,98. При отношении радиусов, большем или равном 1, или меньшим 0,85, этап не засчитывается.

Этап 4 (1 балл). Вывод о том, что радиус звезды при максимуме светимости меньше, чем при минимуме. Вывод должен быть записан в явном виде (текстом или неравенством).