Ключи к заданиям 10 класса

1. Условие. Первый искусственный спутник Земли был запущен немногим более 65 лет назад – 4 октября 1957 г. – в СССР с космодрома Байконур (современное название космодрома). Средняя высота его полета над поверхностью Земли – 580 км. Наклонение орбиты 65°. Считая орбиту спутника круговой, определите его орбитальный период и скорость, а также его максимальную возможную высоту над горизонтом при наблюдении из Новосибирска (55° с.ш.).

Решение. Радиус орбиты спутника ≈ 6380 + 580 = 6960 км. (**1** балл)

Орбитальный период (например, по 3 закону Кеплера):

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot M}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 6960000^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}} \approx 5760 \text{ с} \approx 96 \text{ мин.} \qquad (\mathbf{3} \text{ балла})$$

Орбитальная скорость:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6960}{5760} \approx 7{,}6 \text{ км/с.} \qquad (\mathbf{2} \text{ балла})$$

Имея наклонение орбиты 65°, спутник пролетает над всеми земными параллелями в диапазоне от 65° ю.ш. до 65° с.ш., т.е. максимальная возможная высота спутника над горизонтом для наблюдателя на этих широтах (включая Новосибирск) – 90°, в зените. (**2** балла)

1. Критерии оценивания.

1 этап (1 балл): определение радиуса орбиты спутника – явно, в виде отдельного расчета, или неявно, в составе последующих формул. Вполне допускаются округления в стиле «радиус Земли – 6400 км, высота спутника над поверхностью – 600 км».

2 этап (3 балла): вычисление орбитального периода спутника. Разумное округление физических постоянных, данных и результатов не является ошибкой. Если участник применяет правильные формулы к категорически неправильно найденному радиусу орбиты (например, в качестве радиуса использует высоту над поверхностью), за этот этап ставится не более 1 балла.

3 этап (2 балла): вычисление орбитальной скорости спутника. Разумное округление физических постоянных, данных и результатов не является ошибкой. Если участник применяет правильные формулы к категорически неправильно найденному радиусу орбиты и/или орбитальному периоду, за этот этап ставится не более 1 балла.

4 этап (2 балла): высота над горизонтом. За ответ 90° (или «зенит») вообще без объяснений – 1 балл. При наличии минимального объяснения (вербального или в виде рисунка) – 2 балла.

2. Условие. Первый искусственный спутник Земли имел шарообразную форму с диаметром около 0,6 м. Минимальное расстояние спутника до поверхности Земли довольно сильно отличалось от среднего из-за эллиптичности орбиты и составляло около 215 км. Определите видимую звездную величину спутника при наблюдении с Земли, с расстояния 215 км, если бы он был матовым белым шаром с альбедо 1. Влиянием атмосферы пренебрегите. Считайте, что наблюдателю видна вся освещенная Солнцем половина спутника.

2. Решение. На спутник падает энергия Солнца (равная потоку энергии Солнца на расстоянии Земли w_0, умноженному на площадь диска спутника), которая затем рассеивается спутником в пространство по закону обратных квадратов.

Энергия Солнца (в единицу времени), полученная спутником:

$$\mathrm{w}_0 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}6^2}{4} \text{ .} \qquad (\mathbf{3} \text{ балла})$$

Поток энергии от спутника на расстоянии 215 км:

$$\frac{\mathrm{w}_0 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}6^2}{4}}{2 \cdot \pi \cdot 215000^2}. \qquad (\mathbf{3} \text{ балла})$$

По закону Погсона сравниваем этот поток с потоком от Солнца w_0 и видимой звездной величиной Солнца ($-26{,}8^m$):

$$\mathrm{m} - (-26{,}8^m) = 2{,}5 \cdot \log \frac{2 \cdot 215000^2}{\frac{0{,}6^2}{4}},$$

откуда

$$\mathrm{m} \approx 3{,}2^m. \qquad (\mathbf{2} \text{ балла})$$

На самом деле первый спутник был гораздо тусклее, за пределами проницаемости невооруженного глаза. В первую очередь из-за того, что он вовсе не был рассеивающей белой сферой с альбедо 1, а, скорее, был маленьким зеркальным (металлическим полированным) шаром, и солнечные лучи только с *очень небольшой площади этого шара имели шанс попасть в человеческий зрачок.*

Движущаяся по небу видимая звездочка после запуска спутника – первая в истории, – была второй (центральной) ступенью ракеты, выведшей спутник на орбиту (одной из первых модификаций современной ракеты Союз).

2. Критерии оценивания. Немного проще задача решается, если не делать промежуточных расчетов. Если участник их делал, необходимо проследить за их арифметической корректностью, чтобы возможное снижение баллов отнести только к тем этапам, где арифметические ошибки были допущены. Если для расчетов брался поток солнечной энергии на расстоянии Земли, то он мог быть взят разный: и интегральный, и видимый, – это скажется на промежуточных численных результатах, но не скажется на конечном ответе при правильных расчетах.

1 этап (3 балла): определена (как значение или в виде формулы – промежуточной или составной в последующих формулах) энергия, получаемая спутником в единицу времени от Солнца. Возможные ошибки:

- участник в расчетах посчитал, что 0,6м это радиус, а не диаметр,
- в качестве площади взята площадь полусферы ($\pi d^2/2$), а не диска ($\pi d^2/4$).

За каждую из этих ошибок за этап снимается по 1 баллу.

2 этап (3 балла): определен (как значение или в виде формулы – промежуточной или составной в последующих формулах) поток энергии, доходящий от спутника до наблюдателя. Возможная ошибка – участник использует делитель 4π, а не 2π; за это снимается 1 балл.

3 этап (2 балла): вычисление звездной величины спутника. За правильное понимание формулы Погсона (вне зависимости от правильности расчета входящих в нее величин) – 1 балл. За расчет – 1 балл. Разумное округление на всех этапах не является ошибкой.

3. Условие. Определите теоретический минимальный линейный размер деталей на поверхности Марса, различимых с помощью космического телескопа имени Дж.Уэбба, если наблюдения ведутся в ближнем инфракрасном диапазоне на длине волны 2,1 мкм. Считайте, что диаметр зеркала телескопа 6,5 м, сам телескоп находится вблизи Земли, Марс – в противостоянии, марсианская атмосфера не мешает наблюдениям, а разрешающая способность телескопа ограничивается исключительно дифракцией. Орбиты планет круговые, лежат в одной плоскости.

3. Решение. Дифракционный предел телескопа:

$$\frac{1{,}22 \cdot \lambda}{\mathrm{D}} \approx \frac{1{,}22 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-6}\text{м}}{6{,}5\text{м}} \approx 3{,}9 \cdot 10^{-7} \approx 0.08''. \qquad (\mathbf{3}\ \text{балла})$$

Расстояние до Марса в противостоянии:

$$(1{,}5\ \text{а. е.} - 1\text{а. е.}) \cdot 150\ \text{млн. км} = 75\ \text{млн. км}. \qquad (\mathbf{2}\ \text{балла})$$

Размер деталей на Марсе:

$$75000000\ \text{км} \cdot 3{,}9 \cdot 10^{-7} \approx 30\ \text{км}. \qquad (\mathbf{3}\ \text{балла})$$

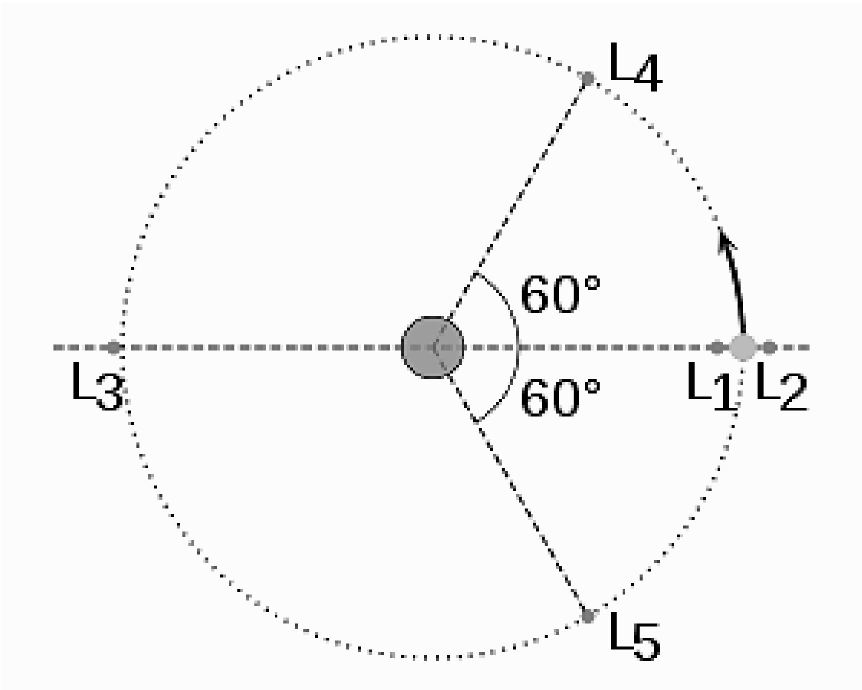
3. Критерии оценивания.

1 этап (3 балла): определен (как значение или в виде формулы – промежуточной или составной в последующих формулах) дифракционный предел. Участник мог в формуле не использовать множитель 1,22 и получить пропорционально меньший результат – это не является ошибкой.

2 этап (2 балла): определено (как значение или в виде формулы – промежуточной или составной в последующих формулах) расстояние до Марса.

3 этап (3 балла): вычислен минимальный размер различимых деталей. Если участник не использовал на этапе 1 множитель 1,22, получится ≈ 24 км, что тоже считается правильным ответом.

4. Условие. Телескоп имени Дж.Уэбба находится вблизи точки Лагранжа L2 системы Солнце-Земля, т.е. примерно в 1,5 млн. км от Земли в сторону от Солнца (см. рисунок; рисунок не в масштабе). Такое расположение, в частности, позволяет частично экранировать Землей требующую низких температур аппаратуру телескопа от солнечной энергии. Какую долю площади солнечного диска экранирует для этого телескопа Земля?



4. Решение. Угловые диаметры Земли и Солнца от телескопа, соответственно:

$$\frac{2 \cdot 6400\ \text{км}}{1500000\ \text{км}} \approx 0{,}0085 \approx 29' \text{ и} \qquad (\mathbf{2}\ \text{балла})$$

$$\frac{2 \cdot 700000\ \text{км}}{150000000\ \text{км} + 1500000\ \text{км}} \approx 0{,}0092 \approx 32'. \qquad (\mathbf{2}\ \text{балла})$$

Отношение площадей дисков равно отношению квадратов диаметров,

(**1** балл)

следовательно, доля закрытой Землей площади диска Солнца равна

$$\frac{29^2}{32^2} \approx 0{,}82. \qquad (\mathbf{3}\ \text{балла})$$

4. Критерии оценивания.

1 этап (4 балла): определение угловых размеров (радиуса или диаметра) Земли и Солнца (неважно, в градусной или радианной мере) – по 2 балла за каждый. Разумное округление (в т.ч. игнорирование расстояния между телескопом и Землей при определении углового размера Солнца) не является ошибкой. Если угловой размер Солнца был взят без расчета как известная величина в половину градуса (30′), за этот угловой размер ставится 1 балл (а не 2).

Если участник «поставил» телескоп в другую точку Лагранжа, этапы 1 и 2 оцениваются в полной мере, исходя из указанного участником местоположения телескопа, за 3 этап ставится 0 баллов.

Если хоть один из двух угловых размеров больше 1° (0,0174 радиан), оценивается только 2 этап, т.е. за всю задачу ставится не более 1 балла.

2 этап (1 балл): указание на квадратичную зависимость площади от радиуса/диаметра – либо в виде правильной формулы для площади круга, либо в виде «квадрата» в формулах/расчетах (например, как в авторском решении).

3 этап (3 балла): вычисление требуемой доли. Разумное округление не является ошибкой. Если участник «забыл» про квадратичную зависимость, за этот этап ставится не более 1 балла. Если участник не проводил промежуточных расчетов и получил числовое значение только на последнем этапе, все этапы оцениваются в полной мере.

5. Условие. В лабораторной системе отчета длина волны $H_{\alpha} = 6562{,}8\mathring{A}$. Определите измеренную длину волны H_{α} при спектрометрических наблюдениях Юпитера с Земли, если Юпитер находится в восточной квадратуре. Влиянием атмосферы Земли, а также суточными вращениями обеих планет пренебречь, орбиты планет считать круговыми, лежащими в одной плоскости; задачу решать в предположении, что с Земли различаема линия H_{α} в спектре Юпитера.

5. Решение. Орбитальные скорости Земли

≈ 30 км/с

(**1** балл)

и Юпитера ≈ 13 км/с.

(**1** балл)

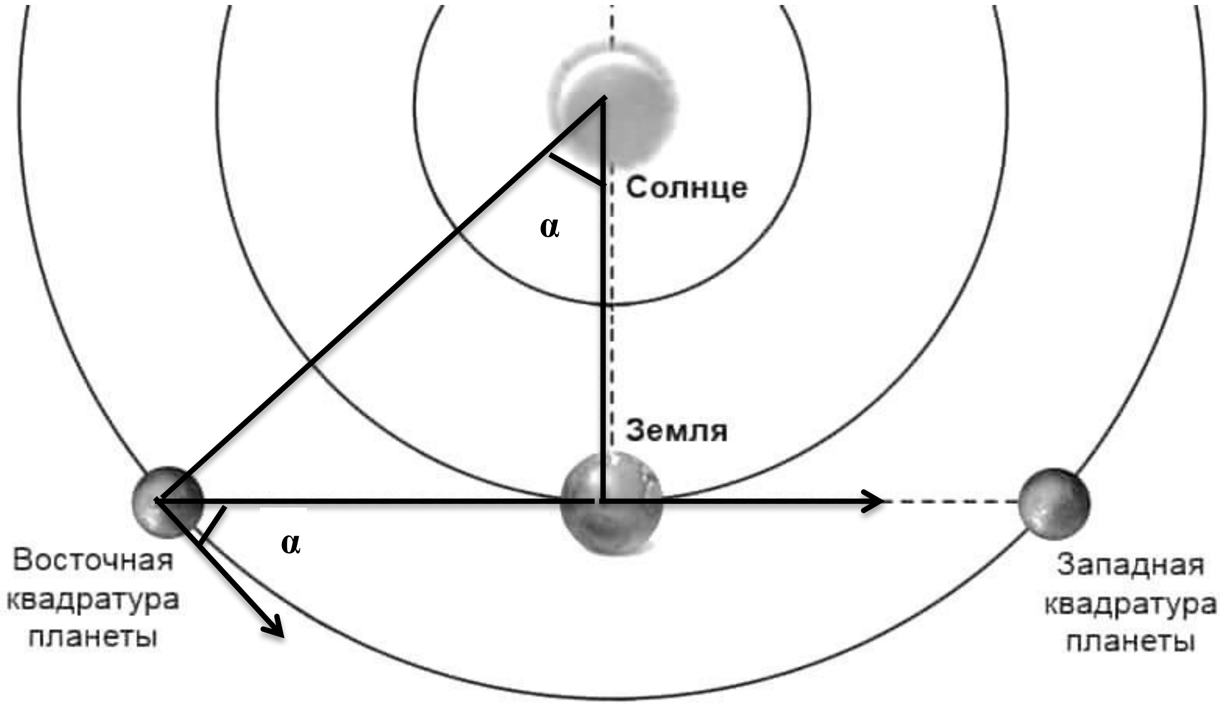
Эти скорости могут быть взяты без расчета, как известные величины, могут быть рассчитаны – например, как первые космические.

В восточной квадратуре угол между орбитальной скоростью Юпитера и направлением на Землю равен

$$\alpha = \arccos\frac{1}{5{,}2} \approx 79°,$$

(**2** балла)

где 1 и 5,2 – орбитальные радиусы Земли и Юпитера в а.е. (см. рисунок; рисунок не в масштабе).



Составляющая орбитальной скорости Юпитера, направленная к Земле: $13\text{км/с} \cdot \cos 79° \approx 2{,}5\ \text{км/с}$,

относительная (относительно Земли) лучевая скорость Юпитера равна $30\text{км/с} - 2{,}5\text{км/с} = 27{,}5\ \text{км/с}$. (**2** балла)

Она направлена от Земли (Юпитер удаляется от Земли), т.е. свет будет испытывать именно красное (а не «синее») смещение. По закону Доплера:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c}, \qquad \text{т.е. } \frac{\Delta\lambda}{6562{,}8\text{Å}} \approx \frac{27{,}5}{300000} \text{ и } \Delta\lambda \approx 0{,}6\text{Å}.$$

Измеренная длина волны будет примерно равна

$6562{,}8\text{Å} + 0{,}6\text{Å} \approx 6563{,}4\text{Å}$. (**2** балла)

5. Критерии оценивания.

1 этап (2 балла): определение орбитальных скоростей Земли и Юпитера. Они могли быть рассчитаны, могли быть просто использованы, как известные. По 1 баллу за каждую из скоростей.

Разумное округление констант, данных и полученных значений, промежуточных и конечных, не является ошибкой.

Если скорости абсурдны (например, скорость Юпитера больше скорости Земли), вся задача оценивается в 0 баллов.

2 этап (4 балла): определение относительной лучевой скорости Юпитера и Земли.

Определение или понимание (выраженное значением или формулой, используемой в дальнейшем) угла между скоростью Юпитера и направлением на Землю (скоростью Земли)– 2 балла. Эти 2 балла ставятся и в том случае, если участник перепутал восточную и западную квадратуры.

Определение относительной лучевой скорости – 2 балла. Если участник перепутал восточную и западную квадратуры, эти 2 балла не ставятся.

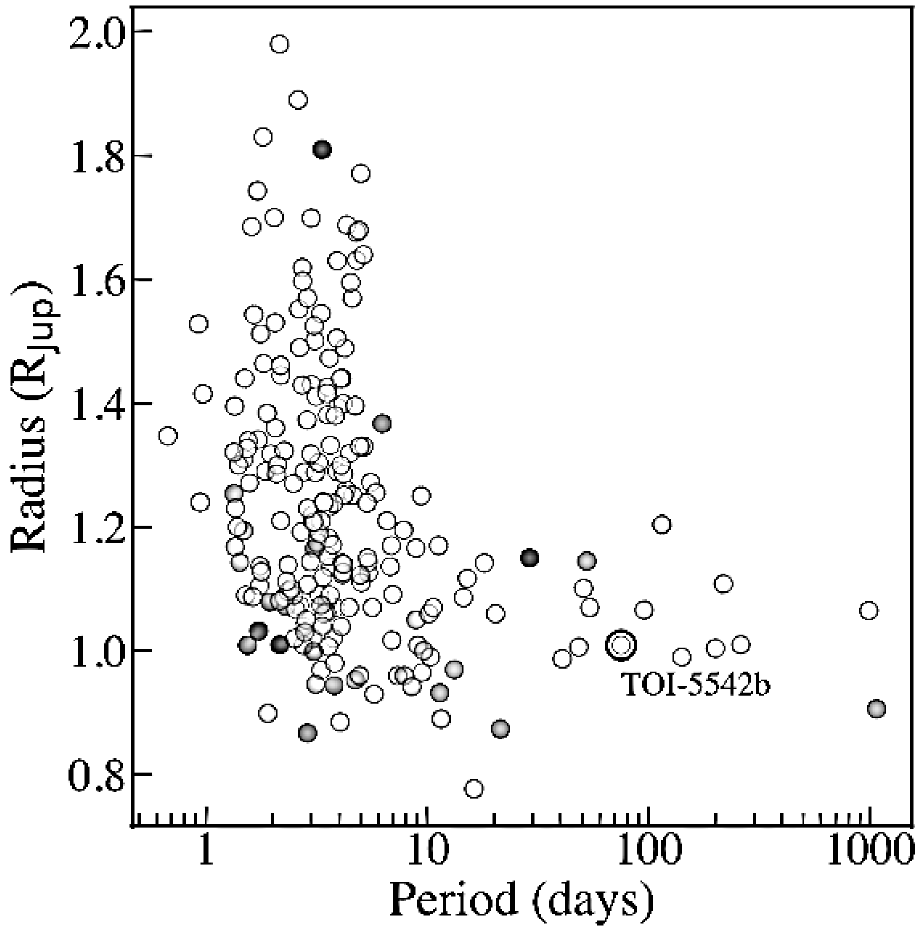
При игнорировании угла между скоростями планет весь этап оценивается в 0 баллов.

3 этап (2 балла): вычисление длины волны. Этап оценивается и в том случае, если на предыдущих этапах были допущены ошибки (за исключением абсурдных скоростей планет на первом этапе) или они – этапы – вовсе отсутствуют.

Формула эффекта Доплера – 1 балл.

Вычисление измеренной длины волны, с поправкой в правильную сторону (увеличение длины волны относительно лабораторной, а не уменьшение) – 1 балл.

6. Условие. На рисунке представлена диаграмма «радиус – орбитальный период» для ряда экзопланет различных звезд. Ось «радиус» отложена в радиусах Юпитера, ось «период» - в логарифмическом масштабе в земных солнечных сутках. Отмеченная на диаграмме планета TOI-5542b вращается по круговой орбите вокруг звезды TOI-5542. Радиус этой звезды составляет 1,06 радиуса Солнца, масса – 0,89 массы Солнца, температура поверхности – 6000К. Определите равновесную температуру этой планеты, считая ее абсолютно черным телом.



6. Решение. По диаграмме определяем орбитальный период планеты – T ≈ 75 земных суток.

(**2** балла)

По 3 закону Кеплера (в данном случае записанному не в единицах СИ, а в массах Солнца, а.е. и земных годах, но это, конечно, не обязательно) находим радиус орбиты:

$$\mathrm{r} = \sqrt[3]{\mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^2} = \sqrt[3]{0{,}89 \cdot (\frac{75}{365})^2} \approx 0{,}33 \text{ а. е.} \approx 50 \text{ млн. км.} \qquad (\mathbf{2} \text{ балла})$$

(0,89 – масса звезды в массах Солнца, 75 – орбитальный период экзопланеты в сутках, 365 – земной год в сутках.)

С помощью закона Стефана-Больцмана ($\mathrm{L} = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$), записанного для Солнца и звезды из задачи, находим поток энергии на орбите планеты (поток $w = \frac{L}{4\pi x^2}$, где x – расстояние от звезды до планеты), используя известный (или вычисленный) поток от Солнца на орбите Земли:

$$\mathrm{w} = 1360 \frac{\text{вт}}{\text{м}^2} \cdot \frac{(6000\text{К})^4}{(5800\text{К})^4} \cdot \frac{1{,}06^2}{1^2} \cdot \frac{(1\text{а. е.})^2}{(0{,}33 \text{ а. е.})^2} \approx 16100 \frac{\text{вт}}{\text{м}^2}. \qquad (\mathbf{2} \text{ балла})$$

(1360 вт/кв.м – интегральный поток Солнца на орбите Земли из справочных материалов; 1,06 и 1 – радиусы звезды TOI-5542 и Солнца в радиусах Солнца.)

В состоянии равновесия входящая на экзопланету энергия равна излучаемой планетой энергии: (**1** балл)

$$w \cdot \pi \mathrm{R}^2 = \sigma \cdot \mathrm{T}^4 \cdot 4\pi \mathrm{R}^2 \text{ или } 16100 \cdot \pi \mathrm{R}^2 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot \mathrm{T}^4 \cdot 4\pi \mathrm{R}^2.$$

Отсюда T ≈ 520K. (**1** балл)

6. Критерии оценивания.

1 этап (2 балла): определение по диаграмме орбитального периода – 75 земных суток. За ответ в диапазоне [70; 80] земных суток – 2 балла, в диапазонах [60; 70) и (80;90] – 1 балл, за другие значения – 0 баллов за этап.

Следующие этапы оцениваются в полной мере по их критериям, даже если участник применяет неправильный период, за который на данном этапе он получил 0 баллов.

2 этап (2 балла): нахождение радиуса орбиты. Участник может по-разному применять 3 закон Кеплера – в той или иной правильной записи – и может вообще обойтись без него (например, используя формулу гравитации). Разумное округление констант, данных и полученных значений, промежуточных и конечных, не является ошибкой.

3 этап (4 балла): определение равновесной температуры. Нахождение потока энергии на орбите экзопланеты – 2 балла. Участник может правильным образом найти поток, не используя поток на земной орбите из справочных материалов, – через светимость звезды. Если участник правильным образом нашел светимость звезды и не смог далее определить поток – 1 балл вместо 2-х.

Правильное понимание баланса энергии при равновесии – входящая энергия равна излучаемой – 1 балл, независимо от правильности предыдущих результатов и дальнейшего нахождения температуры.

Правильно записанное уравнение и полученный результат – 1 балл. Разумное округление констант, данных и полученных значений, промежуточных и конечных, не является ошибкой.