Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников Новосибирской области по математике 2022-2023 г.г.
Решение каждой задачи олимпиады оценивается из 7 баллов

9 класс

9.1. Студенты группы собирали деньги на подарок одногруппнику. Первый из них внёс 10 рублей плюс ещё $\frac{1}{13}$ оставшейся после этого суммы, второй внёс 20 рублей и ещё $\frac{1}{13}$ оставшейся после этого суммы, третий внёс 30 рублей и ещё $\frac{1}{13}$ оставшейся после этого суммы, и так далее. Оказалось, что в итоге каждый студент внёс одну и ту же сумму. Сколько было студентов в группе и какую сумму на подарок они собрали?

Ответ. 12 студентов и 1440 рублей.

Решение. Обозначим собранную сумму за S. Тогда первый студент внёс $10+\frac{S-10}{13}=\frac{S+120}{13}$ рублей, после чего осталось собрать $\frac{12S-120}{13}$. Второй студент внёс $20+\frac{12S-380}{13\cdot 13}$ рублей. Получаем уравнение $\frac{S+120}{13}=20+\frac{12S-380}{13\cdot 13}$, откуда S=1440. При этом первый студент и все остальные внесли по 120 рублей, а всего студентов было 12 человек.

Проверим ответ. Сначала было 0 рублей, убедимся по индукции, что после того, как k-ый студент внёс свою долю, сумма станет равной $120\cdot k$ рублей, $k=1,2,..12$. Если это верно для k, то $k+1$- ый вносит $10\cdot(k+1)+\frac{1}{13}\cdot(120\cdot(12-k)-10\cdot(k+1))=120$ рублей, поэтому после него сумма уже равна $120\cdot(k+1)$ рублей, что и требовалось для шага индукции.

Критерии проверки. (●) Угадан верный ответ с аккуратной проверкой равенства сумм у всех студентов: 2 балла. **(●)** Составлено уравнение типа $\frac{S+120}{13}=20+\frac{12S-380}{13\cdot 13}$: 4 балла.

9.2. Числа a,b,c таковы, что графики трёх различных прямых $ax+by+c=0$, $bx+cy+a=0$, $cx+ay+b=0$ проходят через одну общую точку с положительными координатами. Найдите эти координаты.

Ответ. $x=y=1$.

Решение. Обозначим координаты искомой точки за (x,y). Сложим все три уравнения, получим $(a+b+c)(x+y+1)=0$. Вторая скобка не может равняться нулю ввиду положительности x,y, следовательно, если имеет место ситуация, указанная в условии, то $a+b+c=0$. Но тогда пара $x=y=1$ очевидно удовлетворяет всем трём уравнениям, следовательно, через точку (1,1) как раз и проходят все три прямых. Других решений быть не может, так как различные прямые не могут проходить одновременно через две различных точки.

Критерии проверки. (●) Получено соотношение $(a+b+c)(x+y+1)=0$: 2 балла. **(●)** Доказано, что $a+b+c=0$: ещё 2 балла. **(●)** указано, что тогда $x=y=1$ и есть общая точка: 3 балла. **(●)** Как-то аргументировано, что других точек быть не может: 1 балл.

9.3. В выпуклом четырёхугольнике ABCD биссектрисы углов ABD и ACD пересекаются в некоторой точке на стороне AD. Докажите, что биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются в некоторой точке на стороне BC.

Доказательство. Обозначим за К точку пересечения биссектрис углов ABD и ACD, по условию, К лежит на стороне AD. По свойству биссектрисы, записанному для треугольников ABD и ACD, это обозначает, что AB:BD=AK:KD=AC:CD, откуда AB:AC=BD:CD. В левой части полученного записано отношение, в котором делит сторону BC биссектриса угла BAC, а в правой - отношение, в котором делит сторону BC биссектриса угла BDC. Равенство этих отношений и означает, что биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются в некоторой точке на стороне BC.
Критерии проверки. (●) Записано свойство биссектрисы в данных условиях6 1 балл. **(●)** Доказано, что биссектрисы углов ABD и ACD пересекаются в некоторой точке на стороне AD тогда и только тогда, когда AB:BD=AC:CD: ещё 2 балла.

9.4. Можно ли найти множество М из пяти различных положительных чисел таких, что сумма квадратов любых двух различных чисел из М тоже содержится в М?
Ответ. Нет.
Решение. Предположим, что такое множество М существует. Обозначим его элементы за $a<b<c<d<e$ и рассмотрим следующие семь различных сумм $a^2+b^2<a^2+c^2<a^2+d^2<a^2+e^2<b^2+e^2<c^2+e^2<d^2+e^2$. Все они по условию содержатся в М, но в М всего 5 элементов – противоречие. Следовательно, искомого в условии множества не существует.
Замечание. Набор из семи сумм можно организовать и по-другому, например, так. $a^2+b^2<a^2+c^2<b^2+c^2<b^2+d^2<c^2+d^2<c^2+e^2<d^2+e^2$.
Критерии оценивания. (●) Присутствует идея построения длинной цепочки гарантированно различных элементов из М, но длины не хватает или непонятно, почему элементы в ней различны: 2 балла.

9.5. В каждой клетке таблицы 8 на 8 сначала записан нолик. За одну операцию Вася выбирает некоторую клетку таблицы и меняет на противоположный знаки во всех клетках строки и столбца, содержащих выбранную клетку: нолики меняются на крестики и крестики – на нолики. При этом в самой клетке знак меняется ровно один раз. Какое минимальное количество операций потребуется Васе, чтобы поменять в таблице все нолики на крестики?
Ответ. 64.
Решение. 1). Если Вася проделает по одному разу указанную операцию относительно каждой клетки таблицы, то знак в каждой клетке поменяется на противоположный ровно 15 раз - в каждой из 15-ти операций относительно клеток строки и столбца, содержащих данную клетку. Следовательно, после 64 указанных операций каждый знак изменится на противоположный, и таблица будет заполнена одними крестиками, что и требуется в условии.
2). Докажем, что меньшим числом операций Васе обойтись не удастся. Рассмотрим произвольное множество операций, превращающих все нолики таблицы во все крестики, и отметим на доске 8 на 8 (не в самой таблице!) соответствующую каждой из этих операций клетку. Легко заметить, что последовательность исполнения операций не важна, и что исполнение двух операций относительно одной клетки не имеет смысла, так как является тождественным преобразованием знаков таблицы - эти две операции можно просто удалить из множества и уменьшить число операций в нём. Назовём чётными (нечётными) строку или столбец доски, содержащие чётное (нечётное) число отмеченных клеток. Ввиду того, что каждый знак в таблице поменялся на противоположный, для каждой клетки доски количество отмеченных клеток, содержащихся в одной с ней строке и одном с ней столбце, включая её саму, должно быть нечётным. Это влечёт следующее свойство строк и столбцов доски: на пересечении строки и столбца одинаковых чётностей

должна быть отмеченная клетка, а на пересечении строки и столбца разных чётностей должна быть неотмеченная клетка.
Предположим, что на доске присутствуют строки разной чётности: чётная строка A и нечётная строка B. Каждый нечётный столбец доски пересекается с чётной строкой A по неотмеченной клетке, которых в ней чётное число, следовательно, общее количество нечётных столбцов на доске чётно. С другой стороны, каждый чётный столбец доски пересекается с нечётной строкой B также по неотмеченной клетке, которых в ней нечётное число, следовательно, общее количество чётных столбцов на доске нечётно. Значит, общее количество столбцов доски, равное сумме количеств чётных и нечётных столбцов, должно быть нечётным - противоречие с тем, что в действительности столбцов ровно 8. Следовательно, все строки доски должны иметь одну и ту же чётность. Аналогично, все столбцы доски должны иметь одну и ту же чётность. В таком случае, все клетки их попарных пересечений - а это все клетки доски! - должны быть либо одновременно отмеченными, либо одновременно неотмеченными. Второй случай не подходит, так как он соответствует пустому множеству операций, при этом знаки в таблице не поменяются. Первый случай соответствует как раз множеству из 64 операций, проведённых относительно каждой клетки доски по разу.
Замечание. Если бы размеры таблицы были нечётными, ответ был бы другим.
Критерии проверки. (●) Приведён алгоритм, как поменять все знаки за 64 операции: 3 балла. **(●)** Показано, что требуемое число операций не меньше 64: 4 балла. **Из них (●)** Сделано замечание, что для каждой клетки доски количество отмеченных клеток, содержащихся в одной с ней строке и одном с ней столбце, включая её саму, должно быть нечётным: 1 балл. **(●)** Замечено, что на пересечении строки и столбца одинаковых чётностей должна быть отмеченная клетка, а на пересечении строки и столбца разных чётностей должна быть неотмеченная клетка: 1 балл. **(●)** Доказано, что все строки и все столбцы доски должны иметь одну и ту же чётность: 1 балл. **(●)** Доказано, что все клетки доски должны быть либо одновременно отмеченными, либо одновременно неотмеченными: 1 балл.