Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников Новосибирской области по математике 2022-2023 г.г.
Решение каждой задачи олимпиады оценивается из 7 баллов

11 класс

11.1.

№ 11.1

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \quad (1) \\ x^2-y^2+z^2=1 \quad (2) \\ -x^3+y^3+z^3=-1 \quad (3) \end{cases}$$

Выразим z из (1): $z=x+y+1$ и подставим в (2):

$x^2-y^2+(x+(y+1))^2=1.$

$x^2-y^2+x^2+2x(y+1)+(y+1)^2=1$

$2x^2-\cancel{y^2}+2xy+2x+\cancel{y^2}+2y+1=1 \quad |-1$

$2x^2+2xy+2x+2y=0 \quad |:2$

$x^2+xy+x+y=0$

$(x^2+x)+(xy+y)=0$

$x(x+1)+y(x+1)=0$

$(x+1)(x+y)=0$

Левая часть обращается в ноль при $x=-1$ (1 случай) или при $x=-y$ (2 случай)

Рассмотрим 1 случай ($x=-1$):

$z=x+y+1$

$z=-\cancel{1}+y+\cancel{1}$

$z=y$

Подставим значение x и z в (3):

$-(-1)^3+y^3+y^3=-1$

$1+2y^3=-1$

$2y^3=-2$

$y^3=-1$

$y=-1 \Rightarrow z=-1$

Рассмотрим 2 случай ($x=-y$):

$z=x+y+1$

$z=-y+y+1$

$z=1.$

Подставим значение x y z в (3):

$-(-y)^3+y^3+1=-1$

$y^3+y^3=-2$

$2y^3=-2$

$y^3=-1$

$y=-1 \Rightarrow x=1$

Ответ: 1) $x=-1$; $y=-1$; $z=-1$

2) $x=1$;

11.2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)=2x^2-ax+7$. При каких значениях параметра a найдётся число t из промежутка $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ такое, что выполняется равенство $f(\sin t)=f(\cos t)$?

Ответ. $a\in(2,2\sqrt{2})$.

Решение. По условию задачи $f(\sin t)=2\sin^2 t-a\sin t+7=2\cos^2 t-a\cos t+7=f(\cos t)$, откуда $2(\sin^2 t-\cos^2 t)=a(\sin t-\cos t)$. На интервале $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ выполняется неравенство $\sin t>\cos t$, поэтому полученное равенство можно сократить на скобку $\sin t-\cos t\neq 0$. Значит, $a=2(\sin t+\cos t)=2\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$. Если $t\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, то $t+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$, поэтому $\sin(t+\frac{\pi}{4})$ может принимать любое значение от $\frac{1}{\sqrt{2}}$ до 1.Тогда подходящие значения параметра a образуют открытый промежуток $(2,2\sqrt{2})$.

Критерии проверки. (●) Не проверено $\sin t-\cos t\neq 0$ при сокращении на скобку: минус 2 балла.

11.3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB отрезки AK и BP являются биссектрисами углов BAC и CBA, а точки M и T – основаниями перпендикуляров, опущенных из точек K и P на гипотенузу AB соответственно. Найдите величину угла MCT.

Ответ. 45°.

Решение. Рассмотрим четырёхугольники ACKM и BCPT. Ввиду того, что углы ACK, AMK, BCP и BTP прямые, оба этих четырёхугольника вписанные в окружности с диаметрами AK и BP соответственно. Тогда вписанный в первую окружность угол AMC равен вписанному туда же углу AKC, а вписанный во вторую окружность угол BTC равен вписанному в неё же углу BPC. Следовательно, сумма величин углов AMC и BTC равна сумме величин углов AKC=90°-A/2 и BPC=90°-B/2, то есть 180°-(A+B)/2=135°. Значит, искомая величина угла MCT равна 180° минус сумму величин AMC и BTC, то есть 45°.

Критерии проверки. (●) Замечена и доказана вписанность хотя бы одного из четырёхугольников ACKM и BCPT: 2 балла. **(●)** Замечено и доказано равенство углов AMC и AKC, BTC и BPC: по 1 баллу за каждую пару.

11.4. Найти все натуральные n такие, что все натуральные числа от 1 до n можно записать в ряд в некотором порядке так, что при любом $k=1,2,..,n$ сумма k первых (слева направо) чисел делится на k.

Ответ. $n=1$ и $n=3$

Решение. Очевидные примеры 1 и 1,3,2 показывают, что $n=1$.и $n=3$ являются решениями задачи. Докажем, что при $n\geq 4$ требуемая в условии расстановка невозможна, для этого пойдём с конца. Предположим противное, обозначим требуемую расстановку за $a_1,a_2,...,a_n$. Тогда $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=\frac{1+2+..+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$. Это отношение целое только при нечётных n, что и будет предполагаться дальше.

Сумма $a_1+a_2+...+a_{n-1}$ должна делиться на $n-1$ и отличаться от $\frac{n(n+1)}{2}$ не более, чем на n. Следовательно, она может равняться тем среди чисел от $\frac{n(n+1)}{2}-n=\frac{n(n-1)}{2}$ до

$\frac{n(n+1)}{2}-1$, которые делятся на $n-1$. Заметим, что число $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n+1}{2}=\frac{(n-1)(n+1)}{2}=(n-1)\frac{n+1}{2}$ как раз единственное такое, так как предыдущее равно $\frac{(n-1)(n+1)}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)^2}{2}<\frac{n(n-1)}{2}$, а следующее равно $\frac{(n-1)(n+1)}{2}+(n-1)=\frac{(n-1)(n+3)}{2}>\frac{n(n+1)}{2}-1$. Следовательно, $a_n=\frac{n+1}{2}$.
Сделаем следующий шаг, сумма $a_1+a_2+...+a_{n-2}$ должна делиться на $n-2$ и отличаться от $\frac{(n-1)(n+1)}{2}$ не более, чем на n. Следовательно, она может равняться тем среди чисел от $\frac{(n-1)(n+1)}{2}-n=\frac{n^2-2n-1}{2}$ до $\frac{(n-1)(n+1)}{2}-1$, которые делятся на $n-2$. Заметим, что число $\frac{(n-1)(n+1)}{2}-\frac{n+1}{2}=\frac{(n-2)(n+1)}{2}=(n-2)\frac{n+1}{2}$ как раз единственное такое, так как предыдущее равно $\frac{(n-2)(n+1)}{2}-(n-2)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, а следующее равно $\frac{(n-2)(n+1)}{2}+(n-2)=\frac{(n-2)(n+3)}{2}>\frac{(n-1)(n+1)}{2}-1$ при $n\geq 4$. Следовательно, $a_{n-1}=\frac{n+1}{2}=a_n$ - противоречие. Следовательно, при $n\geq 4$ требуемая в условии расстановка невозможна
Критерии проверки. **(●)** Пример для $n=3$: 1 балл. **(●)** Доказано, что n должно быть нечётным: 1 балл. **(●)** Доказано, что $a_n=\frac{n+1}{2}$: 2 балла. **(●)** Не рассмотрен случай $n=1$: минус 1 балл.

11.5. Найти максимальное S такое, что, любую кучу камней суммарного веса S, в которой вес каждого камня не превосходит 10 кг, можно разделить на две кучки, вес каждой из которых не превосходит 40 кг.
Ответ. 72.
Решение. 1)**.** Докажем, что S не больше 72. При этом можно рассматривать только случай, когда S не превосходит 80, иначе одна из двух куч разбиения очевидно будет весить больше 40 кг. Предположим, что S больше 72, рассмотрим кучу из 9 камней веса S/9<10 кг каждый. При разбиении её на две кучки одна из них будет содержать не менее 5 камней и весить не меньше 5S/9, что больше 40 кг - противоречие.
2). Докажем, что кучу веса не более, чем 72 кг из камней, веса не более 10 кг каждый всегда можно разделить на две кучки веса не более 40 кг каждая. Заметим, что это утверждение достаточно доказать для произвольной кучи веса ровно 72 кг. Действительно, если общий вес кучи меньше 72 кг, добавим несколько камней, чтобы общий вес кучи стал 72 кг, разделим полученное на две кучки веса не более 40 кг и удалим из них добавленные камни, получив требуемое разбиение исходной кучи.
3). Предположим, что некоторую кучу камней общего веса 72 кг нельзя разбить на две кучки веса не более 40 кг каждая.
Изо всего конечного множества разбиений этой кучи на две кучки выберем *оптимальную,* при которой разность между весом тяжёлой кучки и 36 килограммами минимальна. Обозначим вес тяжёлой кучки оптимального разбиения за M кг, по предположению, M>40. При перекладывании любого камня A из тяжёлой кучки в лёгкую кучки должны

меняться ролями, иначе М можно уменьшить на вес А и выбранное разбиение не оптимально.

4). Заметим, что вес любого камня из тяжёлой кучки больше 8 кг, иначе, переложив камень веса не более 8 кг из тяжёлой кучки в лёгкую, мы получим новую лёгкую веса больше 40-8=32 кг и не больше 36 кг, новую тяжёлую веса меньше 72-32=40 кг и требуемое в условии разбиение будет найдено. Далее, вес тяжёлой кучки больше 40 кг, поэтому она не может содержать меньше четырёх камней. Возьмём любые четыре камня из тяжёлой кучки, их суммарный вес, по доказанному, больше 32 кг и не больше 40 кг. Следовательно, суммарный вес всех оставшихся камней меньше 72-32=40 кг и не меньше 72-40=32 кг. Обе кучки имеют вес не больше 40 кг, поэтому требуемое в условии разбиение найдено.

Критерии проверки. (●) Доказано, что S не больше 72: 3 балла. (●) Доказано, что вес любого камня из тяжёлой кучки больше 8 кг: 2 балла. (●) Доказано, что кучу веса не более, чем 72 кг из камней, веса не более 10 кг каждый, всегда можно разделить на две кучки веса не более 40 кг каждая: 4 балла.