Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников Новосибирской области по математике 2022-2023 г.г.
Решение каждой задачи олимпиады оценивается из 7 баллов

10 класс

10.1. Рассмотрим действительные числа $0<a<b<c<d$. Докажите, что многочлены x^4+ax+d и x^4+bx+c не могут иметь общих отрицательных корней.
Доказательство. Любой общий корень двух многочленов должен быть также корнем их разности, равной $(b-a)x+(c-d)$. Единственный корень этой разности равен $\frac{d-c}{b-a}>0$
Критерии проверки. Идея рассмотрения разности многочленов: 2 балла. **(●)**

10.2. На боковой стороне AB трапеции ABCD, в которой углы при основании острые и угол BAD больше угла CDA, произвольно выбрана точка P, отличная от A и B. Доказать, что на стороне CD или её продолжении всегда можно найти точку Q такую, что треугольники CPD и AQB подобны.
Доказательство. 1) Найдём на боковой стороне CD точку Q такую, что угол APD равен углу AQD. Точка Q будет второй точкой пересечения описанной окружности треугольника APD со стороной CD. Тогда и углы PAQ=BAQ и PDQ=CDP равны, как вписанные, опирающиеся на общую хорду PQ. Кроме того, четырёхугольник PBCQ является вписанным, так как угол BPQ равен 180-APQ=180-(180-ADQ)=ADQ=ADC=180-BCD=180-BCQ, и в нём сумма противоположных углов при вершинах P и C равна 180 градусов. Тогда углы PBQ=ABQ и PCQ=PCD равны, как вписанные, опирающиеся на общую хорду PQ. Следовательно, треугольники CPD и AQB подобны по двум углам BAQ= CDP и ABQ=DCP.
2) Возможен случай, когда описанная окружность треугольника APD будет пересекать не сторону CD, а её продолжение за вершину C. В этом случае возникают два вписанных четырёхугольника: APQD и PBQC. Первый по построению, так как углы APD и AQD равны, второй – так как угол BPQ=180-(180-ADC)=ADC=BCQ. Далее, как и в первом случае, получаем равенства вписанных углов BAQ=PAQ=PDQ=PDC и (небольшое отличие) ABQ=180-PCQ=PCD, снова подобие треугольников CPD и AQB по двум углам.
Критерии проверки. (●) Не рассмотрен случай, когда Q лежит на продолжении CD: минус 1 балл.

10.3.. Для пятизначного числа A, все цифры которого различны и не равны 0, обозначим за B число, равное сумме всевозможных трёхзначных чисел, составленных из различных цифр A во всевозможных порядках. Найти все A, для которых A=B.
Ответ. A=35964.
Решение. Пусть $A=\overline{abcde}$- десятичная запись. Общее количество трёхзначных чисел, используемых для построения B. равно числу размещений по 3 элемента из пяти, то есть $A_5^3=5\cdot4\cdot3=60$, в них каждая цифра используется по $A_4^2=4\cdot3=12$ раз в каждом из трёх разрядов. Следовательно, $B=12(a+b+c+d+e)\cdot111=1332(a+b+c+d+e)$, что равно по условию A. Число 1332 делится на 9, следовательно, и A делится на 9. По признаку делимости на 9 отсюда следует делимость на 9 суммы его цифр $a+b+c+d+e$. Учитывая границы $a+b+c+d+e\ge1+2+3+4+5=15$ и $a+b+c+d+e\le5+6+7+8+9=35$, получим, что сумма $a+b+c+d+e$ может равняться 18 или 27. Проверяем умножением этих чисел на 1332: $18\cdot1332=23976$ и $27\cdot1332=35964$. Первый случай нам не подходит, потому что сумма цифр результата в

этом случае равна 27, а должна быть 18. Во втором случае сумма цифр результата равна 27, как и должно быть. Следовательно, A=35964 – единственный ответ задачи.

Критерии проверки. (●) Найдено соотношение $B = 12(a+b+c+d+e)\cdot 111 = 1332(a+b+c+d+e)$: 3 балла. **(●)** Отсюда замечено, что A делится на 9: 1 балл. **(●)** Отсюда доказано, что сумма $a+b+c+d+e$ может равняться 18 или 27: 1 балл. **(●)** Проверены оба случая: по 1 баллу каждый.

10.4.

Задание 10.4.

$$\begin{cases} x^2+5y+z+1=0 \\ y^2+x-7z+6=0 \\ z^2-3x-y+7=0 \end{cases}$$

Решением системы называется тройка чисел, которая обращает каждое уравнение в верное равенство

Сложим все три уравнения, получим

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+14 = (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=0$$

откуда для проверки получаем $x=1,\ y=-2,\ z=3$

При подстановке этой тройки чисел в каждое уравнение убеждаемся, что ни одно равенство не выполняется

$$(1)^2+5(-2)+3+1 = 1-10+3+1 \neq 0.$$

$$(-2)^2+1-7\cdot 3+6 \neq 0.$$

$$3^2-3\cdot 1+2+7 \neq 0.$$

Следовательно система решений не имеет.

Применены следующие критерии:

— если найдена тройка чисел и сделана проверка, доказано, что система решений не имеет 7б.

— если найдена тройка чисел, проверки нет, но в ответ выписано $x=1,\ y=-2,\ z=3$ выставляется 3б.

10.5. Несколько (больше одной) команд провели волейбольный турнир в один круг, при этом каждая команда сыграла с каждой другой ровно один матч, в ходе которого одна из них победила, а другая – проиграла. В итоге оказалось, что число побед, одержанных каждой командой, равно сумме чисел побед, одержанных всеми командами, которым данная команда проиграла. Сколько команд участвовало в турнире?

Ответ. Три команды.

Решение. Обозначим число участвующих команд за n, выберем из них команду A, одержавшую минимальное число побед k. Каждый матч заканчивается победой одной из сторон, поэтому всего в играх турнира было одержано число побед, равное числу матчей, то есть ровно $\frac{n(n-1)}{2}$ Тогда в силу минимальности $k \le \frac{n(n-1)}{2} \Big/ n = \frac{n-1}{2}$, то есть $n \ge 2k+1$ Рассмотрим $n-k-1$ команд, которым А проиграла. Каждый матч заканчивается победой одной из сторон, поэтому в играх между собой они суммарно одержали ровно $\frac{(n-k-1)(n-k-2)}{2}$ побед, плюс ещё $n-k-1$ победу они одержали над А, всего в сумме у них не менее $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ побед. По условию, получаем неравенство $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \le k$. Из доказанного ранее неравенства $n \ge 2k+1$ следует $\frac{k(k+1)}{2} \le \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \le k$, откуда $k \le 1$. Тогда $\frac{(n-1)(n-2)}{2} \le 1$, следовательно $n \le 3$. Если $n = 2$, то $k = 0$ и условие задачи не выполняется, так как выигравшая команда одержала одну победу. А вот при $n = 3$ в турнире, когда первая команда победила вторую, вторая - третью, а третья – первую, условие выполнено. Следовательно, единственным ответом задачи является $n = 3$.

Критерии проверки. (●) Доказано, что число команд не больше 3: 5 баллов. **(●)** Доказано, что команд может быть только 3: 1 балл. **(●)** Указан пример турнира для трёх команд: 1 балл.